

Comunicazione 2 del 23 ottobre 2013*

1 - GEOMETRIA PROIETTIVA. ELEMENTI GEOMETRICI FONDAMENTALI

La **Geometria** si occupa delle proprietà delle figure sul piano e nello spazio.

La **Geometria elementare** (euclidea) riguarda le proprietà metriche delle figure.

La **Geometria proiettiva** studia le proprietà delle figure che rimangono immutate rispetto alle trasformazioni proiettive. Le trasformazioni proiettive si ottengono sottoponendo le figure ad operazioni di proiezione da un punto e sezione con un piano (vedi oltre).

Il **punto** è un'entità priva di dimensione e indivisibile. Nella pratica del disegno, tuttavia, il punto avrà una dimensione perché possa essere visualizzato.

Materializzazioni: la punta di uno spillo, l'incontro di due bordi di un foglio, l'incontro di tre spigoli di un cubo.

La **retta** è l'insieme di infiniti punti allineati.

Materializzazioni: il bordo di un foglio, delimitato da due punti (che si in questo caso si definiscono estremi di un segmento), è una porzione di retta (ossia un segmento).

Prolungando tale porzione all'infinito nelle due direzioni otterremo una retta. Una retta è priva di spessore, ha lunghezza infinita e individua una direzione nello spazio. La direzione è la caratteristica comune a un gruppo di rette parallele.

La distanza fra due punti è la misura del segmento che ha per estremi i due punti.

La distanza di un punto da una retta è la distanza minima fra il punto e la retta, ottenuta tracciando la perpendicolare dal punto alla retta.

Il **piano** è un'insieme di rette che si intersecano vicendevolmente. Il piano è un elemento di dimensioni illimitate e privo di spessore, definito dall'insieme di infiniti punti che gli appartengono (piano punteggiato) o delle infinite rette che gli appartengono (piano rigato).

Materializzazioni: un foglio di carta, delimitato da rette che si intersecano vicendevolmente e che generano segmenti (i bordi del foglio), è una porzione di piano. Il piano definisce una giacitura, rappresentata dalla sua posizione nello spazio rispetto a una terna cartesiana di riferimento.

* Il contenuto delle comunicazioni non corrisponde interamente a quello delle lezioni in aula. Rappresenta solo un promemoria per la verifica e l'approfondimento degli argomenti trattati.

Postulati

(da verificare empiricamente con oggetti come fogli, bacchette di legno, spilli, ecc.):

- per tre punti non allineati passa un piano (solo un piano);
- una retta e un punto esterno ad essa definiscono un piano (solo un piano);
- due rette incidenti definiscono un piano (solo un piano);
- per una retta passano infiniti piani;
- due rette appartenenti ad uno stesso piano individuano sempre un punto: **punto proprio**, se le rette non sono parallele, **punto improprio** (ossia all'infinito) se le rette sono parallele. L'introduzione del concetto di punto improprio, stabilita dalla Geometria proiettiva, permette di ampliare il 5° postulato di Euclide, che espresso con parole semplici asserisce: "rette parallele non si incontrano mai". Con l'introduzione del concetto di punto improprio possiamo dire: rette appartenenti a un piano si incontrano sempre in un punto (proprio o improprio).

Un fascio di rette parallele, quindi, ha in comune sia il punto improprio che la direzione, in quanto il punto improprio assume anche il significato di direzione. Ogni piano ha una retta all'infinito, che è comune a tutti i piani ad esso paralleli.

Elementi fondamentali di una proiezione

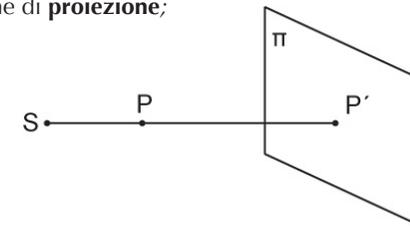
Le operazioni di proiezione e sezione si realizzano attraverso tre elementi:

- un **punto di proiezione**, o centro proiettivo, o punto di vista, dal quale escono i raggi proiettanti;
- una figura oggettiva, o **oggetto** da rappresentare;
- un piano di proiezione o **quadro**, su cui si costruisce l'immagine dell'oggetto. Nella pratica operativa, il quadro coincide col foglio sul quale si disegna.

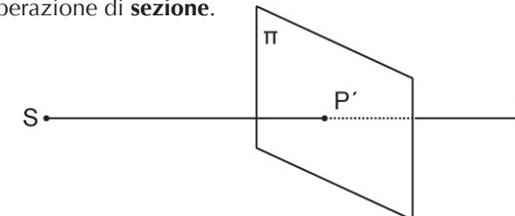
Relazioni fra gli elementi di una proiezione

Fra le infinite posizioni spaziali che i tre elementi possono assumere, individuiamo:

- piano di proiezione π dopo il punto di proiezione S e dopo l'oggetto P. In tal caso si realizza un'operazione di **proiezione**;



- piano di proiezione π interposto fra il punto di proiezione S e l'oggetto P. In tal caso si realizza un'operazione di **sezione**.



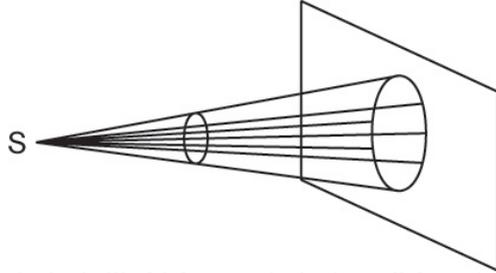
Proiezioni coniche e proiezioni cilindriche

Fra le infinite posizioni spaziali che il punto di proiezione può assumere, individuiamo due posizioni fondamentali:

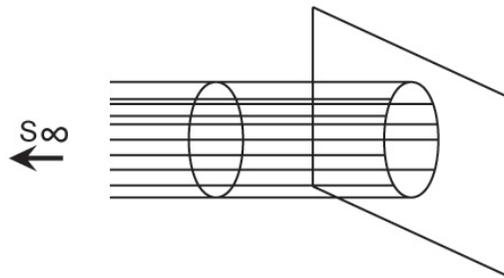
- punto di proiezione S a distanza *finita*;
- punto di proiezione S a distanza *infinita*.

Da queste due posizioni derivano i due sistemi proiettivi fondamentali:

- il sistema delle **proiezioni coniche** o **proiezioni centrali**, utilizzato nella prospettiva;



- il sistema delle **proiezioni cilindriche** o **proiezioni parallele**, utilizzato nelle proiezioni ortogonali e nell'assonometria.



Parallelismo e perpendicolarità

(da verificare con oggetti come fogli di carta, bacchette di legno, ecc.).

Sia dato un piano, e una retta non appartenente ad essa. Se i punti della retta hanno tutti la stessa distanza dal piano, la retta è parallela al piano. Se i punti della retta hanno distanze diverse dal piano, ci sarà un punto a distanza zero e questo punto si definisce di intersezione fra la retta e il piano.

Una retta è perpendicolare a un piano se è perpendicolare a due rette del piano.

La distanza di un punto dal piano è la misura del segmento appartenente alla perpendicolare condotta dal punto al piano.

La distanza fra due rette parallele è la misura di un segmento perpendicolare alle due rette.

2 - LA PROSPETTIVA (Prima parte)

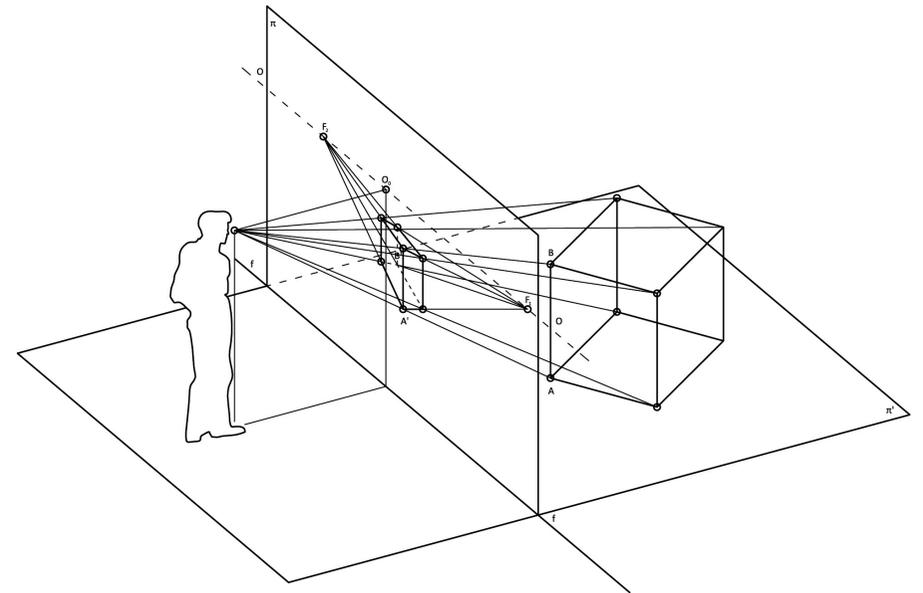
La prospettiva è una rappresentazione bidimensionale in grado di esprimere la profondità dello spazio e la posizione degli oggetti all'interno di esso mediante un'immagine che simula la visione umana.

La prospettiva è caratterizzata da uno *scorcio* più o meno accentuato. La caratteristica tipica di ogni prospettiva infatti, risiede proprio nel fatto che le dimensioni degli oggetti si riducono man mano che la loro distanza dall'osservatore aumenta.

A differenza dell'assonometria, la prospettiva è una proiezione *conica* (o *centrale*); il punto di vista (centro di proiezione) è collocato a una distanza finita e, quindi, misurabile.

L'obiettivo di una costruzione prospettica è di rappresentare sul foglio uno schema geometrico apparentemente tridimensionale e verosimigliante, nonostante i rapporti metrici delle figure reali riprodotte non siano immediatamente desumibili dal disegno.

L'immagine sottostante riproduce le condizioni proiettive di una prospettiva: una figura oggettiva da rappresentare (un cubo), un quadro π (corrispondente al foglio da disegno), un punto di vista a distanza finita (occhio dell'osservatore). L'immagine si ottiene sul quadro in seguito all'intersecazione dei raggi visuali che uniscono il punto di vista con i punti caratteristici del cubo. Essa è la *prospettiva* del cubo stesso.

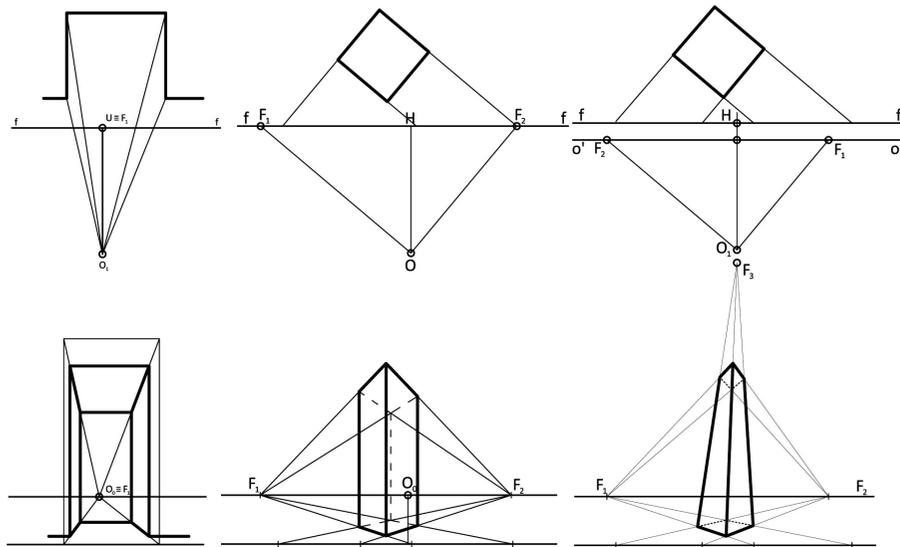


La figura precedente mostra una situazione generica; si possono infatti avere diversi "modelli" di prospettiva. Essi derivano dalle reciproche posizioni del punto di vista, dell'oggetto e del quadro.

Se il quadro è verticale e parallelo a uno dei lati dell'oggetto da rappresentare (immaginiamo di voler rappresentare uno spazio di forma parallelepipeda), si ottiene un sistema che prende il nome di **prospettiva centrale** (esempio a sinistra).

Se il quadro è verticale ma parallelo a nessuno dei lati del parallelepipedo, il sistema prende il nome di **prospettiva accidentale** (esempio al centro).

Se, infine, il quadro è inclinato rispetto alla verticale, il sistema è denominato **prospettiva a quadro inclinato** (esempio a destra).



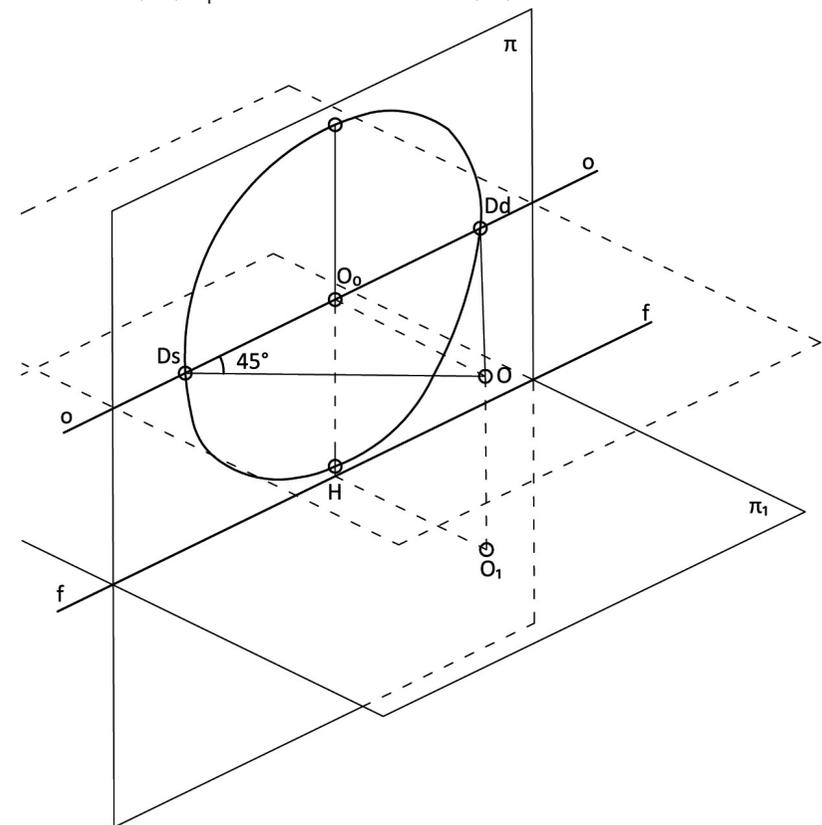
Le espressioni "prospettiva a un punto di fuga", "prospettiva a due punti di fuga", "prospettiva a tre punti di fuga" **sono errate e non devono essere usate MAI**. Chiariremo meglio questo concetto più avanti.

Elementi per la costruzione di una prospettiva

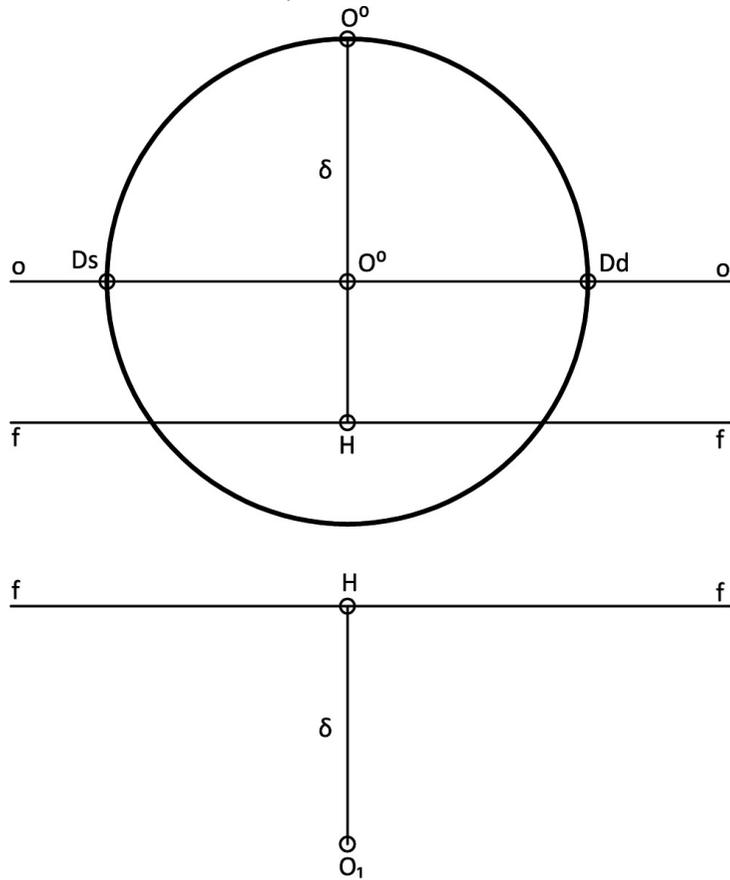
(da memorizzare senza indecisioni e per sempre!!)

Per la costruzione di una prospettiva occorre definire:

- un piano π , detto quadro, disposto verticalmente;
- un piano ausiliario π_1 , detto geometrale, disposto orizzontalmente;
- la retta di intersezione fra π e π_1 , detta linea di terra;
- un punto di vista O ;
- la proiezione O_0 di O sul quadro, detta punto principale;
- la distanza $O-O_0$, detta distanza principale;
- la retta parallela alla linea di terra passante per O_0 , detta linea di orizzonte;
- la proiezione O_1 di O sul geometrale, prima proiezione del punto di vista;
- la distanza fra O e O_1 , detta altezza del punto di vista;
- la proiezione di O_0 sul geometrale (punto H);
- il cerchio, tracciato sul quadro con centro in O_0 e raggio pari alla distanza principale, detto cerchio di distanza;
- i punti di intersezione della linea di orizzonte col cerchio di distanza, detti punto di distanza destro (Dd) e punto di distanza sinistro (Ds).



A questo punto occorre rappresentare gli elementi visualizzati nell'immagine precedente mediante due viste separate: una vista frontale e una vista dall'alto.



Le due viste, quindi, riproducono il modello tridimensionale visualizzato in precedenza mediante un "prospetto" (in alto) e una "pianta" (in basso). Utilizzando questo schema, potremo costruire tutti i tipi di prospettiva.

Rappresentazione di un quadrato posto sul geometrale in posizione generica

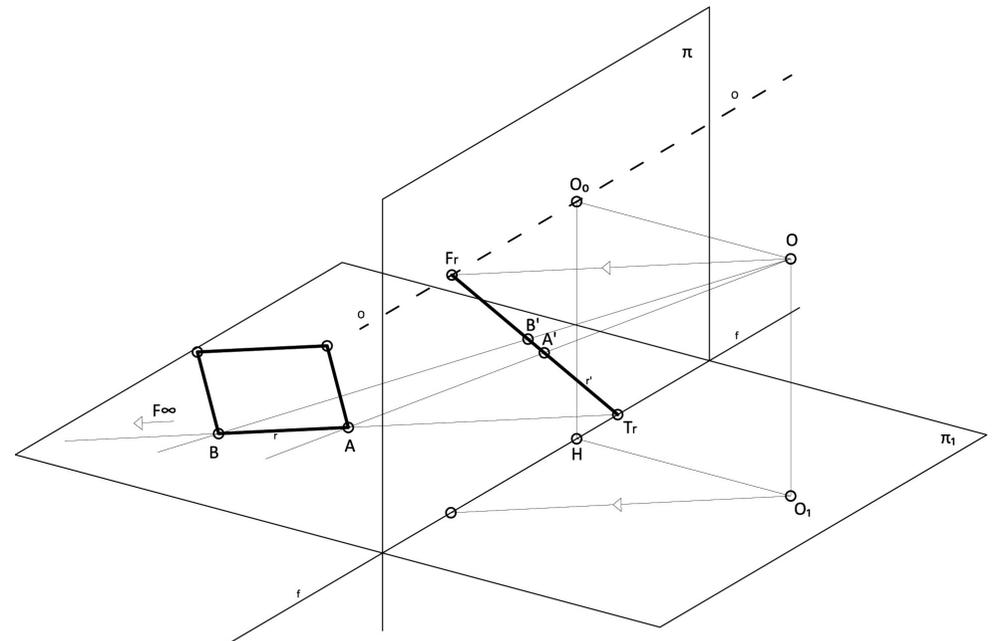
Dovendo rappresentare il lato AB di un quadrato disposto sul geometrale, innanzitutto si costruisce la retta r passante per esso e la si prolunga fino a incontrare la linea di terra nel punto Tr (**traccia** di r).

Costruiamo ora l'immagine sul quadro di tale retta. Per far ciò, dobbiamo proiettare due dei suoi punti dal punto di vista O sul quadro π , e trovare la loro rappresentazione. Il primo punto che sceglieremo sarà Tr ; esso infatti appartiene sia alla retta r che al quadro π , e la sua immagine coincide con se stesso.

Il secondo punto che sceglieremo sarà il punto improprio (ossia all'infinito) della retta r . La sua proiezione si otterrà mandando la parallela ad r da O . Tale parallela incontrerà il quadro nel punto Fr , **punto di fuga** della retta r e immagine del punto all'infinito di r sul quadro.

A questo punto, basterà unire Tr con Fr per ottenere r' , immagine prospettica della retta r .

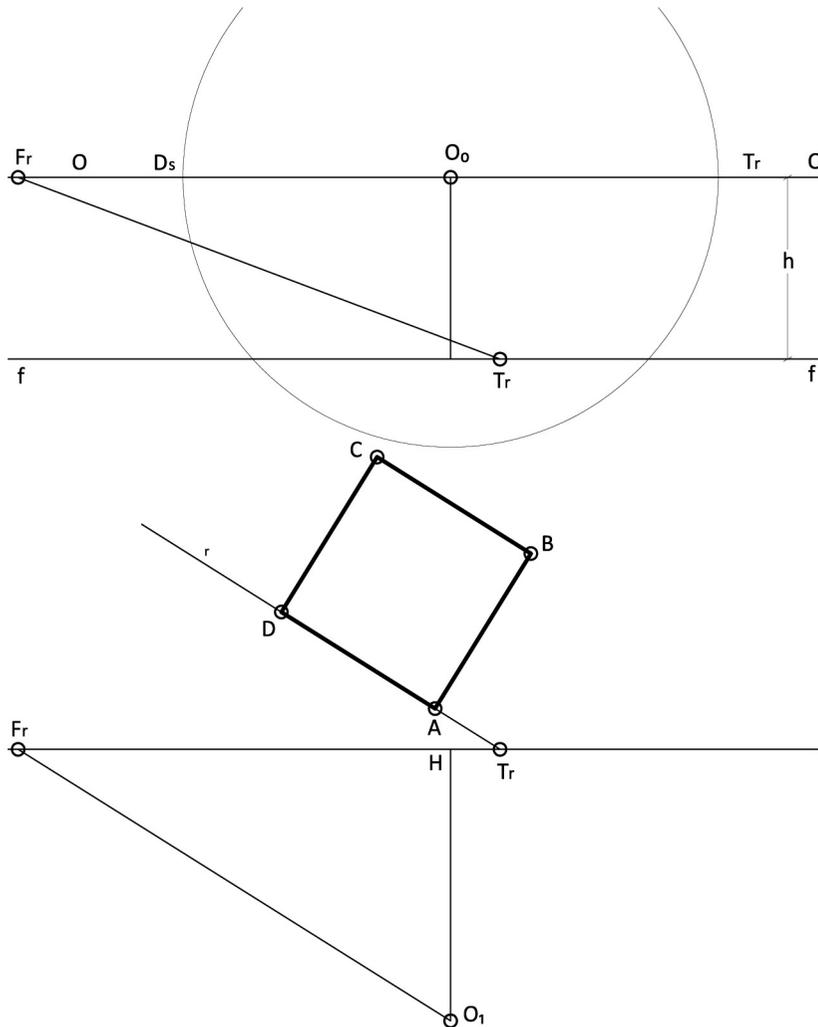
Per ottenere l'immagine prospettica dei punti A e B , è sufficiente congiungerli con O e trovare l'intersezione dei raggi visuali con r' . Tali intersezioni determineranno A' e B' , immagini prospettiche di A e B .



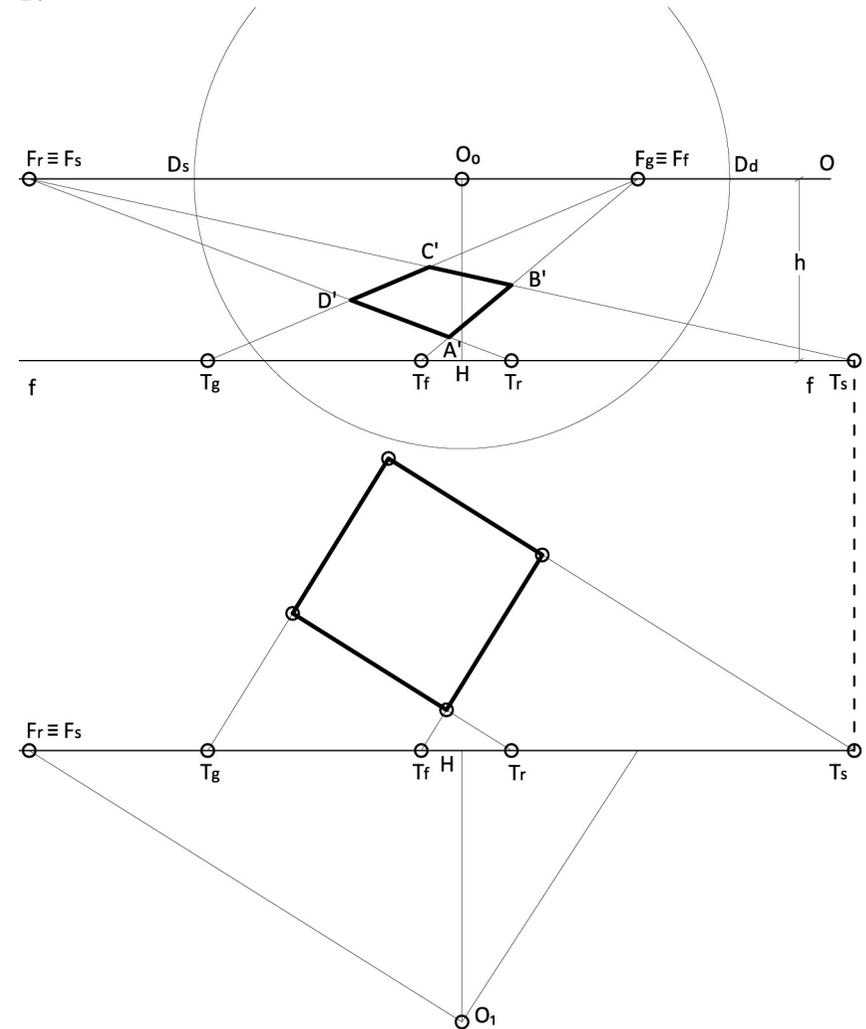
Ma tutto questo avviene nello spazio. Spostiamo il problema sul piano da disegno, utilizzando lo schema presentato nella pagina precedente

Il procedimento di costruzione è il seguente:

1. Si costruisce in pianta il quadrato ABCD;
2. Si fa passare per il lato AD una retta r ; l'intersezione di r con la linea di terra sarà Tr (traccia di r);
3. Si riporta il segmento HTr sul piano del quadro;
4. In pianta, da $O1$ si manda la parallela ad r fino a incontrare la linea di terra nel punto Fr (proiezione in pianta della fuga della retta r);
5. Sul piano del quadro, si riporta il segmento HFr sulla linea di orizzonte ottenendo, all'altezza della linea di orizzonte, il punto Fr (fuga della retta r);
6. Si congiunge, sempre sul piano del quadro, Tr con Fr , ottenendo l'immagine prospettica della retta su cui giace uno dei lati del quadrato.



Con lo stesso procedimento si ottengono le immagini prospettiche delle altre tre rette su cui giacciono i lati del quadrato; le loro intersezioni determinano i vertici A, B, C, D.



La figura evidenzia una proprietà fondamentale della rappresentazione prospettica, ossia: **rette parallele convergono tutte in un unico punto di fuga**. Tale punto può essere **improprio** (se le rette sono parallele al quadro) o **proprio** (se le rette non sono parallele al quadro). Nel caso esaminato le rette non sono parallele al quadro e, quindi, i punti di fuga sono propri. In una prospettiva i punti di fuga sono tanti quanto le direzioni delle rette presenti nella figura da rappresentare.

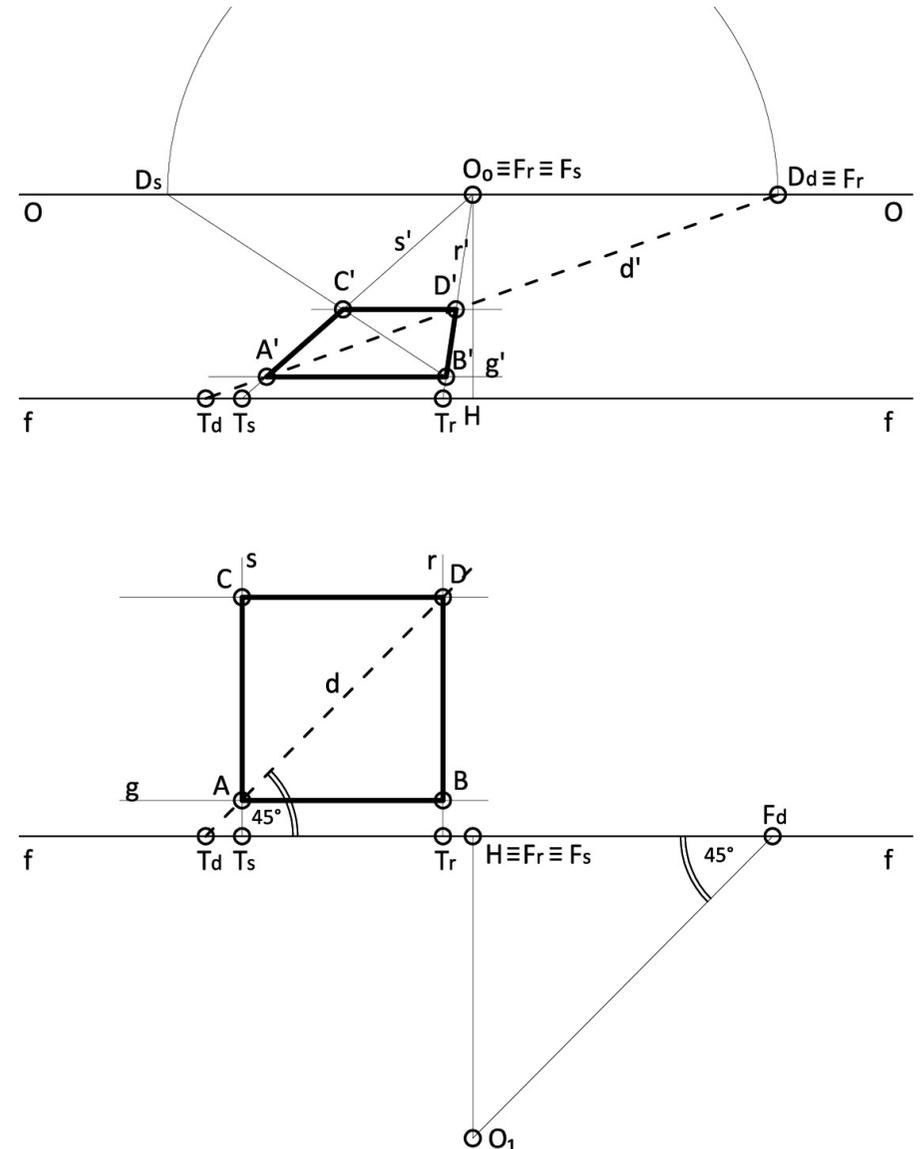
Rappresentazione di un quadrato posto sul geometrale con lato parallelo alla linea di terra.

Si inizia la costruzione come nell'esempio precedente, ossia:

1. Si determina Tr ;
2. Si conduce per O_1 la parallela alla retta r fino a ottenere sulla linea di terra il punto Fr (esso coincide col punto H e, sul quadro, col punto O_0 ; ciò significa che **le rette perpendicolari al quadro hanno il punto di fuga coincidente col punto principale**);
3. Si ripete lo stesso procedimento per la retta s .

Per quanto riguarda la retta g , il procedimento non si può applicare in quanto, essendo parallela alla linea di terra, ha la traccia impropria. Inoltre, conducendo per O_1 la parallela a g per trovare la sua fuga, si noterà che è anch'essa impropria. Di conseguenza, l'immagine prospettica della retta g , avendo traccia e fuga improprie, sarà parallela alla linea di terra e alla linea di orizzonte. Per risolvere il problema è necessario ricorrere a una retta ausiliaria, come la diagonale del quadrato d .

4. Si prolunga d ottenendo Td (traccia di d);
5. Si manda da O_1 la parallela a d , ottenendo Fd (fuga di d);
6. Si riportano Td e Fd sul piano del quadro;
- Dato che d è inclinata di 45° rispetto alla linea di terra, noteremo che il segmento $H_f d$ è uguale al segmento $O_1 H$. Considerato che quest'ultimo è uguale alla distanza principale, anche il segmento $H Fd$ è uguale ad essa. Ricordando la definizione del cerchio di distanza (cerchio di raggio pari alla distanza principale), è evidente che **i punti di fuga delle rette inclinate a 45° coincidono con i punti di distanza**, definiti come intersezione fra il cerchio di distanza e l'orizzonte;
7. Si congiunge Td con Fd e si ottiene la retta d' ; tale retta interseca r' nel punto D' e s' nel punto A' ;
8. Si manda da A' la parallela alla linea di terra fino a incontrare la retta r' ; nel punto di intersezione si troverà B' ;
9. Si manda da D' la parallela alla linea di terra fino ad incontrare la retta s' ; nel punto di intersezione si troverà C' , immagine prospettica dell'ultimo lato del quadrilatero.



Esercizio in aula

Rappresentare in prospettiva, utilizzando il metodo illustrato, un quadrato e un rettangolo. La posizione del quadrato è libera, il rettangolo avrà un lato parallelo al quadro. Posizione del punto di vista e del quadro: a scelta.

Strumenti: matita 2H.

2. L'OCCHIO E LA MANO

Obiettivo del secondo modulo è esercitarsi nella pratica del disegno a mano libera; allenare l'occhio e la mano; essere in grado di rappresentare correttamente qualsiasi situazione spaziale; rendere comprensibili materiali e strutture. Esprimere, attraverso il disegno, quello che si vede e quello che si sente.

Per fare questo, proponiamo cinquanta disegni a mano libera, da realizzare secondo indicazioni precise. Anche se "il disegno non si insegna, ma si può solo imparare", ci sono regole generali, che è bene osservare sempre, e informazioni più specifiche, che verranno fornite con la spiegazione di ogni esercizio.

Regole generali

1. Sentirsi a proprio agio. Trovare uno spazio confortevole e ben illuminato. Seder-si comodamente. Concedersi tempo, evitando di mettersi al lavoro se si è di fretta. Ascoltare musica può aiutare a rilassarsi e ad entrare nello stato d'animo giusto. Se si è stanchi, nervosi o in un cattivo stato d'animo, rimandare il lavoro a un momento migliore.
2. Non avere fretta di iniziare. Una volta scelto il soggetto, guardarlo a lungo senza disegnare. Cercare di entrare dentro le cose: il loro funzionamento, le proporzioni, la qualità dello spazio, la grana dei materiali. Scegliere con la massima attenzione l'inquadratura, cioè la porzione di spazio da rappresentare e la posizione da cui si decide di osservarlo: si tratta di una scelta fondamentale per il buon esito di qualsiasi disegno. Scegliere con cura il formato del foglio: il formato condiziona la composizione.
3. Disegnare quello che si vede, non quello che si sa. A volte si disegna in modo mnemonico, riproducendo gli schemi mentali che si hanno degli oggetti. Gli schemi mnemonici sono utili a organizzare il ricordo delle cose ma spesso sono lontani dalla realtà e privi di correttezza geometrica e dimensionale.
4. Guardare l'oggetto più che il foglio. È l'oggetto che trasmette le informazioni indispensabili a portare avanti il lavoro. Guardare troppo il foglio, inoltre, rende inevitabilmente succubi di un giudizio estetico, a scapito della libertà e della verosimiglianza.
5. Cominciare il disegno socchiudendo leggermente gli occhi. In questo modo si perde la percezione degli elementi di minore importanza e ci si concentra sulla forma generale e sui rapporti fra le parti, ossia gli elementi più importanti di una rappresentazione.
6. Disegnare prima le forme più grandi e poi quelle più piccole. Quando si diventa bravi, questa regola può essere derogata, ma all'inizio conviene "ingabbiare" i dettagli e gli elementi dalle dimensioni minori all'interno di un'intelaiatura.
7. Usare la matita per verificare gli allineamenti e per misurare le proporzioni. In altre parole: verificare in corso d'opera ciò si sta facendo, senza aspettare che il disegno sia finito prima di accorgersi di un errore grossolano nel dimensionamento delle parti.
8. Non cancellare mai. Meglio ridelineare, lasciando che i segni si sovrappongano. Se non è possibile ridelineare, cambiare foglio e ricominciare da capo. Per non entrare in tentazione, non comprare la gomma; se la si ha già comprata, buttarla via.
9. Tracciare linee il più possibile continue. Evitare le linee "pelose", composte da piccoli tratti affiancati. Affidare la qualità del disegno al tratto piuttosto che a sfumatu-

re e chiaroscuro. Tenere la matita ben appuntita.

10. Riempire sempre il foglio (a meno che la composizione dell'immagine suggerisca diversamente). Se il disegno non occupa tutto il foglio, aggiungere altri disegni, fino a riempirlo.

11. Disegnare dal vero piuttosto che da foto. I motivi sono numerosi. Quello principale deriva dal fatto che dal vero abbiamo la libertà di decidere quale scena inquadrare e quale posizione assumere rispetto al soggetto, mentre in una foto queste scelte sono già state effettuate, spesso da altri.

Strumenti

- fogli di carta bianca liscia formato A4 (tipo carta per fotocopie)
- matita: portamine da mm 2 con mine 3H (dura), HB (media), 2B (morbida)
- scotch di carta (tipo "carroziere")
- puntine da disegno
- tavoletta di compensato cm 35 x 50 circa, da utilizzare per i disegni all'esterno
- compasso
- squadrette
- temperamine a campana
- penna PILOT G-TEC-C4 da 0,4 mm (o altra penna sottile di vostro gradimento, ma sempre con punta metallica). Chi lo desidera, può usare i tradizionali pennini di metallo da intingere nella china o i pennelli, sempre e solo con inchiostro di china nero. Altri strumenti (pennarelli, carboncini, gessetti, sanguigne, ecc.) possono essere utilizzati ma solo per realizzare altri disegni in aggiunta ai quelli obbligatori. L'uso della gomma è vietato.

I disegni devono essere realizzati man mano che vengono illustrati, per poterli presentare puntualmente alle consegne del 27 novembre (disegni 1-15), 18 dicembre (disegni 16-30), 29 gennaio (disegni 31-50). Devono essere sottoposti a revisione. Preparatevi a rifarne molti, e molte volte. Siate giudici di voi stessi, non presentate mai lavori di cui non siete soddisfatti. I disegni che andranno bene saranno firmati sul retro dal docente e dovranno essere consegnati all'esame, impaginati in un book le cui modalità di realizzazione saranno illustrate durante il corso.

Disegni 1-5. Esercizi per la mano e il segno

Anche se questi esercizi possono apparire "meccanici" (e in effetti servono a vincere la pigrizia, le cattive abitudini "forzando" la postura e i movimenti abitudinari della mano), sforzatevi sempre di raggiungere un risultato convincente anche dal punto di vista estetico, curando la composizione dell'immagine come se fosse un disegno da incorniciare e appendere alla parete.

I disegni 1-5 sono concettualmente molto semplici ma tecnicamente molto impegnativi. Vi costeranno molta più fatica rispetto agli altri. Non scoraggiatevi!

1. Circonferenze concentriche

Disegnare a matita, con le squadrette, le diagonali del foglio. Puntare il compasso al

centro del foglio e disegnare un cerchio di raggio pari a cm 3, uno di raggio pari a cm 6 e uno di raggio pari a cm 9. Con la penna tracciare una serie di circonferenze, a partire dal centro, senza staccare la penna dal foglio. Il foglio deve essere tenuto in posizione verticale e non deve essere spostato. Le circonferenze devono essere il maggior numero possibile e non devono toccarsi l'una con l'altra.

Strumenti: squadrette, matita HB, compasso, penna.

2. Scala di sfumature

Con la matita e le squadrette, suddividere il foglio in quattro colonne verticali e in dieci righe orizzontali. Disegnare, nelle caselle della prima riga, due o più linee verticali equidistanti; aumentarne il numero nella seconda riga, aumentarlo ancora nella terza e così via, continuando a infittire la trama fino alla decima. Nelle caselle della seconda, terza e quarta colonna aggiungere, sempre infittendo la trama man mano che si procede verso il basso, linee orizzontali. Nelle caselle della terza e quarta colonna aggiungere, sempre infittendo leggermente la trama man mano che si procede verso il basso, linee inclinate a 45°. Nelle caselle della quarta colonna aggiungere, sempre infittendo leggermente la trama man mano che si procede verso il basso, linee inclinate a 90° rispetto a quelle tracciate precedentemente.

Strumenti: matita HB, penna.

3. Linea spezzata continua

Disegnare, senza mai staccare la penna, una linea spezzata che partendo da uno spigolo del foglio definisca segmenti sempre paralleli ai lati del foglio stesso. La trama che ne risulterà dovrà essere più fitta al centro o, in alternativa, nel terzo medio del foglio.

Strumenti: qualsiasi tipo di penna o pennarello, purché la punta non sia troppo grossa.

4. Curva continua

Con la matita, tracciare una linea variamente ondulata al centro del foglio. Con la penna, tracciare linee contigue superiormente e inferiormente ad essa. Il foglio deve essere tenuto fermo e le linee non devono toccarsi l'una con l'altra.

Strumenti: matita HB, penna.

5. Disegno a punti

Scegliere, su un libro o una rivista, un edificio (se possibile, un'architettura famosa). L'immagine ideale è quella in cui siano ben definite e differenziate le parti in luce e quelle in ombra. Un migliore risultato si otterrà se vi sono pareti curve. Disegnare con la matita, molto leggermente, i contorni degli elementi principali. Con la penna, ridisegnare la scena mettendo in evidenza i volumi, i materiali, le luci e le ombre utilizzando esclusivamente punti.

Strumenti: matita HB, penna (non a sfera) o rapidograph o pennarello a punta sottile.

Esercizio in aula

Disegnare con la matita su un foglio due quadrati (l: cm 10).

Con la penna, tracciare il maggior numero di linee parallele orizzontali a mano libera, da un'estremità all'altra dei lati verticali del primo quadrato, senza staccare la penna.

Il foglio deve essere tenuto in posizione verticale e non deve essere mai spostato. Le linee devono essere il maggior numero possibile e non devono avere punti di contatto.

Disegnare linee parallele verticali a mano libera, da un'estremità all'altra dei lati orizzontali del secondo quadrato, senza staccare la penna. Il foglio deve essere tenuto in

posizione verticale e non deve essere mai spostato. Le linee devono essere il maggior numero possibile e non devono avere punti di contatto. Per agevolare il lavoro, è possibile tracciare, con matita e squadrette, alcune linee guida (massimo 5).

Strumenti: penna, matita HB.