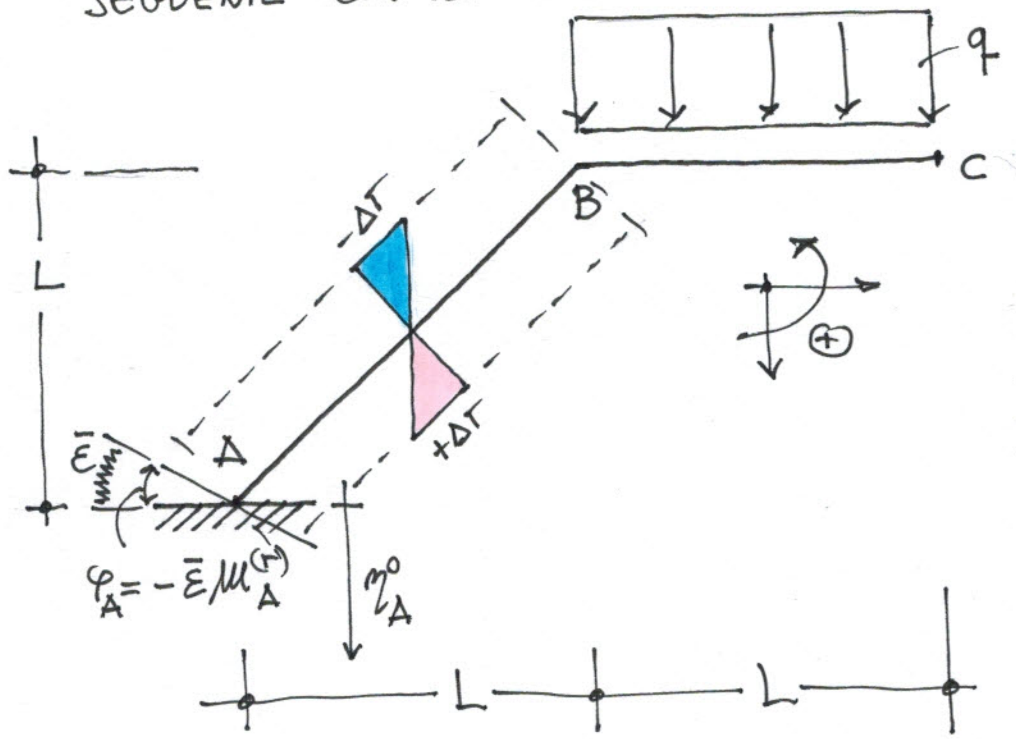
MECCANICA delle STRUTTURE AA. 2017-18

CORSO P. FUSCHI - prova scritta del 11.04.2018

P. FUSCHI
A. PISANO

Quesito n. 2. (2 CFU)

DETERMINARE LO SPOSTAMENTO VERTICALE η_C DELLA SEZIONE DI ESTREMITÀ C DELLA STRUTTURA SEGUENTE CON IL METODO DELLA FORZA UNITARIA (PLV)



POSIZIONI:

$$|\bar{\varepsilon}| = \frac{L}{4EI}$$

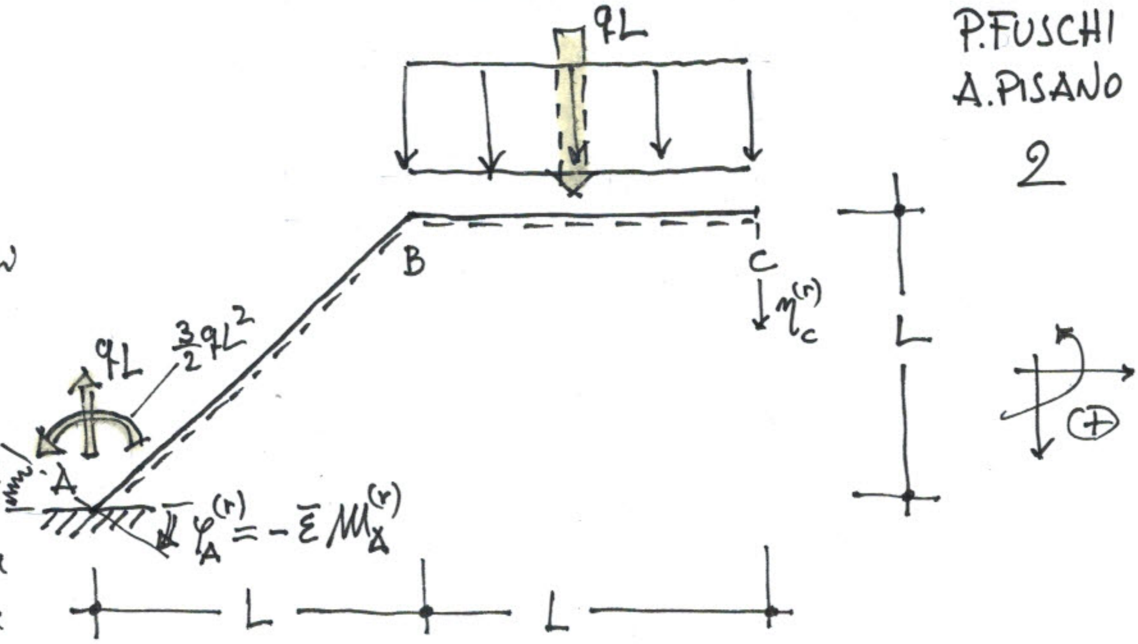
$$|\eta_A^0| = \frac{qL^4}{8EI}$$

$$\left|\frac{\alpha \Delta T}{h}\right| = \frac{19}{18}\frac{qL^2}{EI}$$

P. FUSCHI
A. PISANO

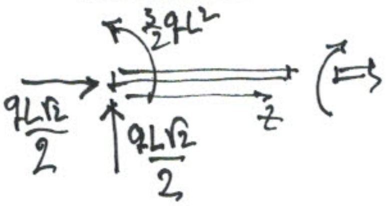
STRUTTURA REALE

Sulla quale si valutano gli spostamenti generalizzati reali e le CD congruenti espresse tramite le CS associate ai carichi reali.



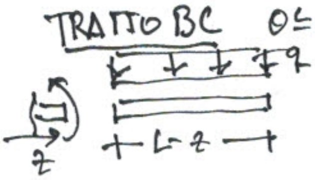
Calcoliamo RV e CS (considerando solo il contributo del momento) sulla struttura reale, al fine del calcolo delle RV si applica il metodo grafico. Si calcola quindi $M^{(r)}(z)$ sui singoli tratti. Si ha:

TRATTO AB $0 \le z \le L\sqrt{2}$



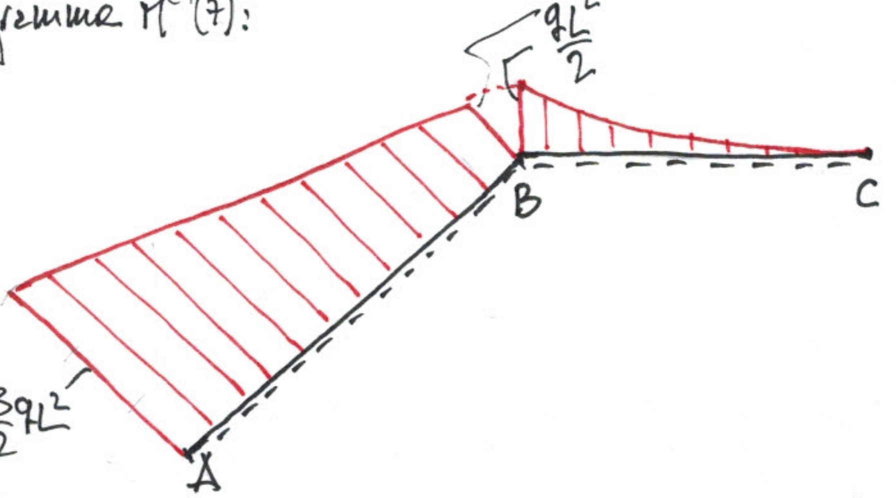
$$\boxed{M^{(r)}(z) = \frac{qL\sqrt{2}}{2} z - \frac{3}{2}qL^2} \qquad \begin{cases} M_A = -\frac{3}{2}qL^2 \\ M_B = -\frac{qL^2}{2} \end{cases}$$

TRATTO BC $0 \le z \le L$



$$\boxed{M^{(r)}(z) = -q\frac{(L-z)^2}{2}} \qquad \begin{cases} M_B = -\frac{qL^2}{2} \\ M_C = \phi \end{cases}$$

Diagramma $M^{(r)}(z)$:

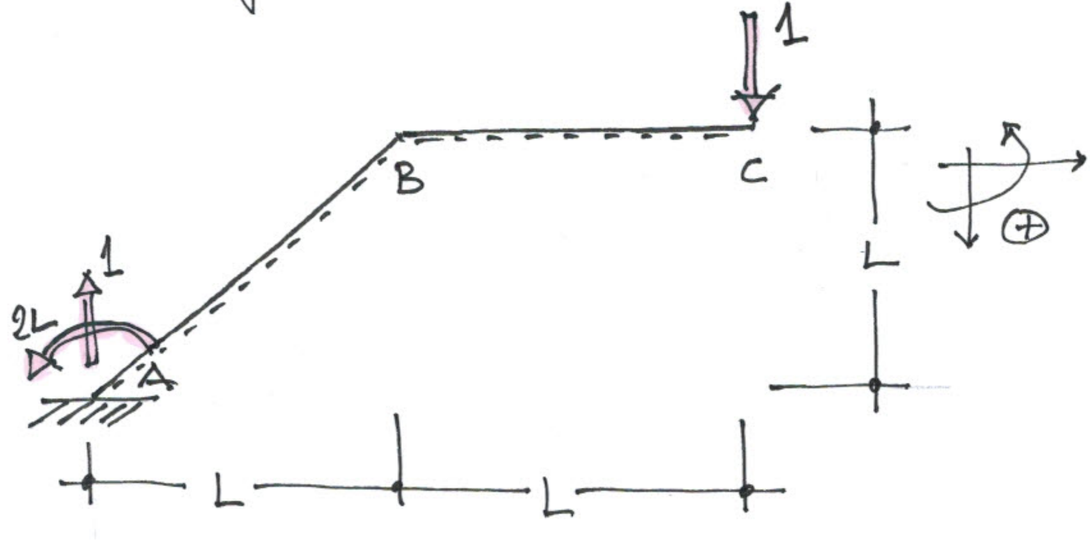


P.FOSCHI
A.PISANO

Per calcolare lo spostamento della sezione di estremità C si assume come SISTEMA FITTIZIO o LAVORANTE quello riportato nella figura seguente nel quale la struttura è caricata da una forza unitaria applicata in C con direzione verticale e agente verso il basso.

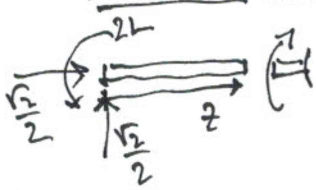
STRUTTURA FITTIZIA per il calcolo di η_c

Su queste si valutano forze e CS equilibrate



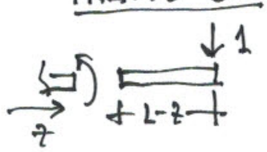
Calcoliamo RV e CS nella struttura fittizia. RV con metodo grafico. CS attraverso la determinazione di $M^{(f)}(z)$ sui singoli tratti. Si ha:

TRATTO AB $0 \leq z \leq L\sqrt{2}$



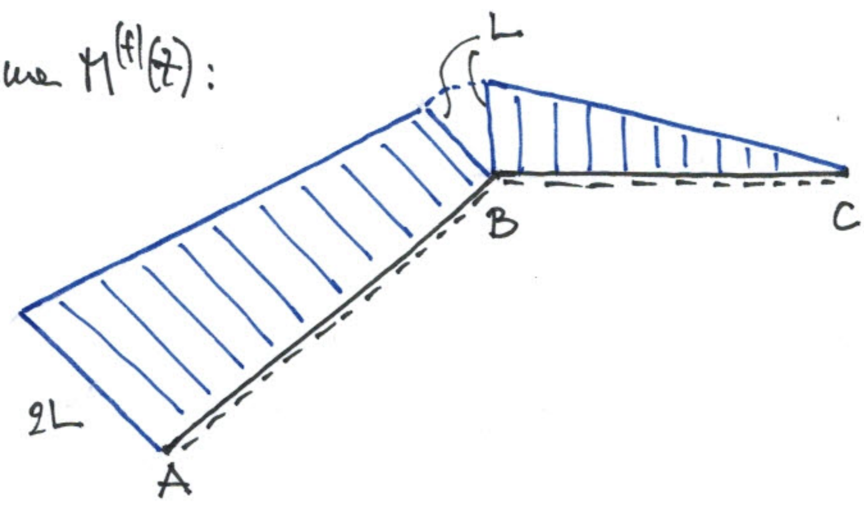
$$\boxed{M^{(f)}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} z - 2L} \quad \begin{cases} M_A = -2L \\ M_B = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot L\sqrt{2} - 2L = -L \end{cases}$$

TRATTO BC $0 \leq z \leq L$



$$\boxed{M^{(f)}(z) = -(L-z)} \quad \begin{cases} M_B = -L \\ M_C = 0 \end{cases}$$

Diagramma $M^{(f)}(z)$:



P.FUSCHI
A.PISANO

Applicando il PLV-MdFU nella forma $L_{ve}=L_{vi}$ può scriversi:

$$L_{ve} = 1\cdot\eta_c + \sum_j R_j^{(f)}\eta_j^{(r)} = 1\cdot\eta_c + \underbrace{\mathcal{M}_A^{(f)}}_{2L}\,\underbrace{\varphi_A^{(r)}}_{-\bar{\varepsilon}\underbrace{\left[\frac{3}{2}qL^2\right]}_{\mathcal{M}_A^{(r)}}} + \underbrace{R_{y_A}}_{-1}\cdot\underbrace{\eta_A^{(r)}}_{\eta_A^0} =$$

$$= \eta_c - \cancel{2}L\bar{\varepsilon}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}qL^2 - \eta_A^0 = \eta_c - 3qL^3\bar{\varepsilon} - \eta_A^0$$

$$L_{vi} = \int_{Str} M^{(f)}\frac{M^{(r)}}{EI}\,dStr + \int_{Str} M^{(f)}\frac{\alpha\Delta T}{h}\,dStr =$$

$$= \frac{1}{EI}\int_{\overline{AB}}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}z - 2L\right]\left[\frac{qL\sqrt{2}}{2}z - \frac{3}{2}qL^2\right]dz +$$

$$+ \frac{1}{EI}\int_{\overline{BC}}[z-L]\left[-q\frac{(L-z)^2}{2}\right]dz + \int_{\overline{AB}}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}z - 2L\right]\frac{\alpha\Delta T}{h}\,dz =$$

$$= \frac{1}{EI}\int_0^{L\sqrt{2}}\left\{\frac{qL}{2}z^2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}qL^2\cdot z - qL^2\sqrt{2}z + 3qL^3\right\}dz +$$

$$+ \frac{1}{EI}\int_0^L -\frac{q}{2}\left\{3L^2z + z^3 - 3Lz^2 - L^3\right\}dz +$$

$$+ \frac{\alpha\Delta T}{h}\int_0^{L\sqrt{2}}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}z - 2L\right\}dz =$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{\frac{qL}{2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{L\sqrt{2}} - \frac{3}{4}\sqrt{2}qL^2\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{L\sqrt{2}} - qL^2\sqrt{2}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{L\sqrt{2}} + 3qL^3[z]_0^{L\sqrt{2}}\right\} +$$

$$- \frac{q}{2EI}\left\{3L^2\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^L + \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^L - 3L\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^L - L^3[z]_0^L\right\} +$$

$$+ \frac{\alpha\Delta T}{h}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{L\sqrt{2}} - 2L[z]_0^{L\sqrt{2}}\right\} =$$

P. FUSCHI
A. PISANO

$$= \frac{qL^4}{EI}\sqrt{2}\cdot\frac{19}{12} + \frac{qL^4}{8EI} - \frac{3}{2}\frac{\alpha\Delta T}{h}\sqrt{2}\,L^2$$

Applicando il PLV-MdFV, esplicitando cioè $L_{ve} = L_{vi}$, risulta in definitiva:

$$\eta_C = 3qL^3 \underset{\substack{\parallel \\ \frac{L}{4EI}}}{\bar{\varepsilon}} + \eta_A^0 + \frac{19}{12}\sqrt{2}\,\frac{qL^4}{EI} + \frac{qL^4}{8EI} - \frac{3}{2}\sqrt{2}\,\underbrace{\frac{\alpha\Delta T}{h}}_{\frac{19}{18}\frac{qL^2}{EI}}L^2$$

$$\eta_A^0 = \frac{qL^4}{8EI}$$

tenendo conto delle posizioni iniziali

Si ha infine: $\boxed{\eta_C = \frac{qL^4}{EI}}$ positivo! concorde a F=1 verso il basso!