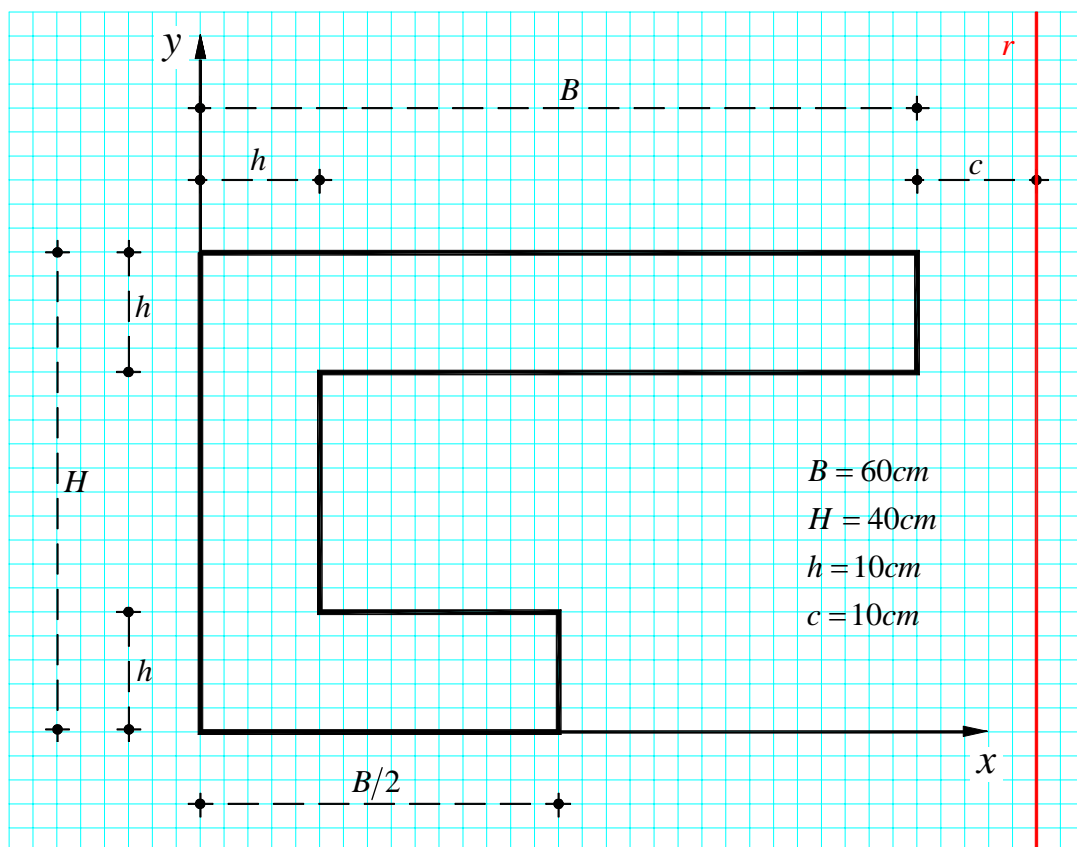


## ESERCIZIO n.5

Data la sezione riportata in Figura, determinare:

- gli assi principali centrali di inerzia;
- l'ellisse principale centrale di inerzia;
- il nocciolo centrale di inerzia;
- il momento di inerzia  $I_r$  rispetto alla retta  $r$  indicata in Figura.



### 1. Determinazione del baricentro della sezione

Per individuare il baricentro della sezione, le cui coordinate verranno espresse nel sistema di riferimento  $(x, y)$  indicato in Figura, è opportuno scomporre la sezione in tre rettangoli, per esempio: uno di lati  $B = 60\text{cm}$  e  $h = 10\text{cm}$ , il secondo di lati  $h = 10\text{cm}$  e  $H - 2h = 20\text{cm}$ , il terzo di lati  $B/2 = 30\text{cm}$  e  $h = 10\text{cm}$ . Si procede quindi all'individuazione del baricentro e al calcolo dell'area per ciascuno dei rettangoli:

Rettangolo I

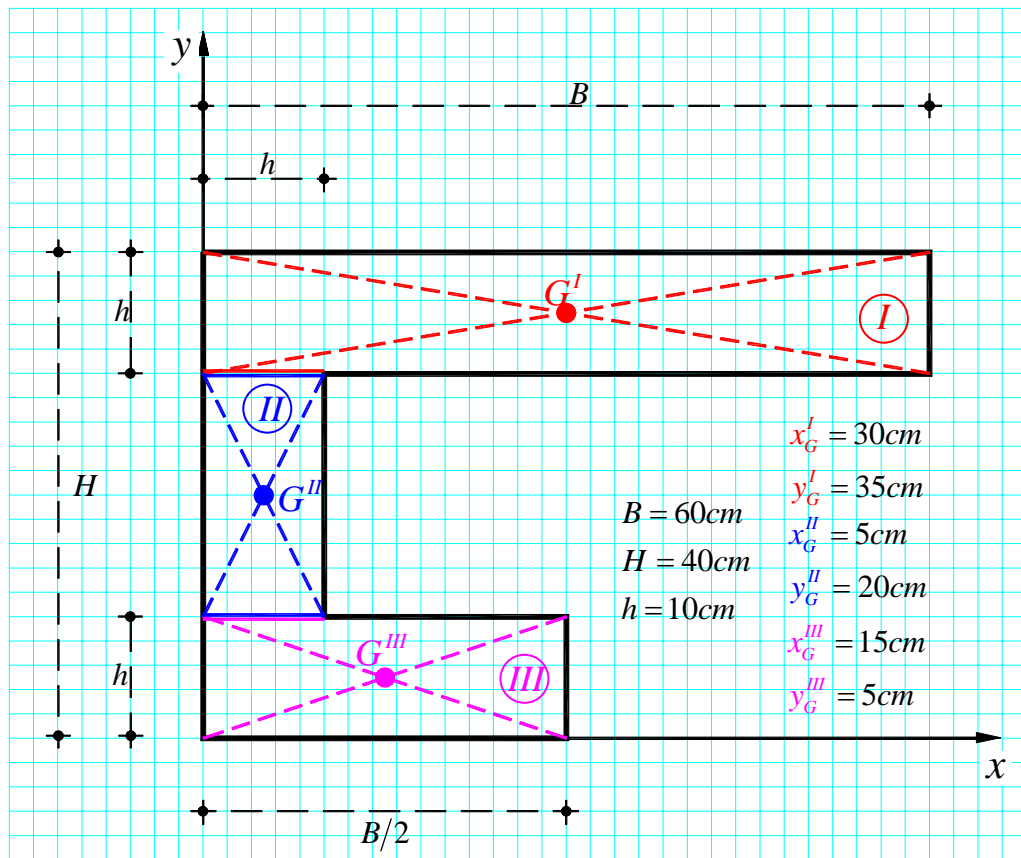
$$A^I = B \cdot h = 60 \cdot 10 = 600 \text{ cm}^2$$

$$\begin{cases} x_G^I = \frac{B}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ cm} \\ y_G^I = H - \frac{h}{2} = 40 - \frac{10}{2} = 35 \text{ cm} \end{cases}$$

Rettangolo II

$$A^{II} = (H - 2h) \cdot h = (40 - 2 \cdot 10) \cdot 10 = 200 \text{ cm}^2$$

$$\begin{cases} x_G^{II} = \frac{h}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm} \\ y_G^{II} = \frac{H - 2h}{2} + h = \frac{20}{2} + 10 = 20 \text{ cm} \end{cases}$$



Rettangolo III

$$A^{III} = \frac{B}{2} \cdot h = \frac{60}{2} \cdot 10 = 300 \text{ cm}^2$$

$$\begin{cases} x_G^{III} = \frac{B}{4} = \frac{60}{4} = 15 \text{ cm} \\ y_G^{III} = \frac{h}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm} \end{cases}$$

L'area complessiva della sezione è ovviamente pari a:

$$A = A^I + A^{II} + A^{III} = 600 + 200 + 300 = 1100 \text{ cm}^2$$

Si calcolano quindi i momenti statici della sezione rispetto agli assi  $x$  e  $y$  e ciò sfruttando la proprietà additiva del momento statico:

Momento statico  $S_x$  rispetto all'asse  $x$ :

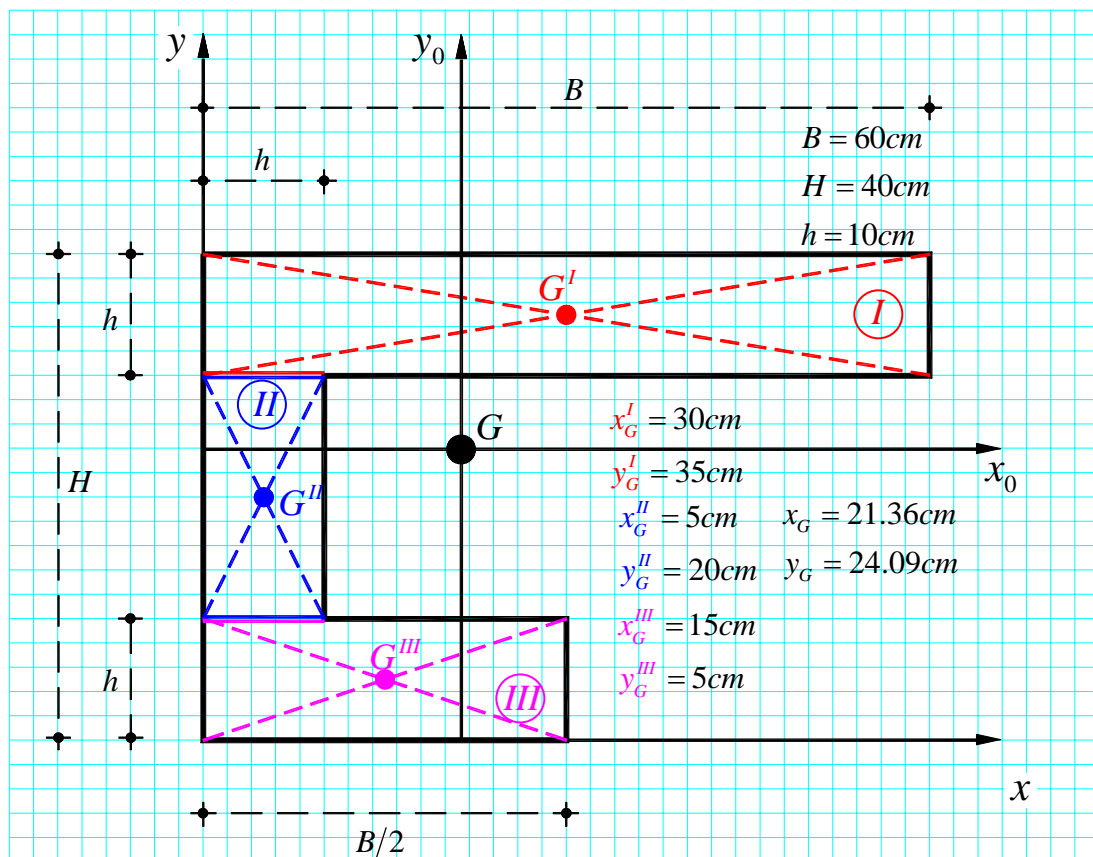
$$S_x = S_x^I + S_x^II + S_x^III = A^I y_G^I + A^II y_G^II + A^III y_G^III = 600 \cdot 35 + 200 \cdot 20 + 300 \cdot 5 = 26500 \text{ cm}^3$$

Momento statico  $S_y$  rispetto all'asse  $y$ :

$$S_y = S_y^I + S_y^II + S_y^III = A^I x_G^I + A^II x_G^II + A^III x_G^III = 600 \cdot 30 + 200 \cdot 5 + 300 \cdot 15 = 23500 \text{ cm}^3$$

Si può infine determinare la posizione del baricentro della sezione nel riferimento  $(x, y)$  considerato applicando le formule di seguito riportate ed esplicitate numericamente per il caso in esame, risulta:

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{23500 \text{ cm}^3}{1100 \text{ cm}^2} = 21.36 \text{ cm}, \quad y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{26500 \text{ cm}^3}{1100 \text{ cm}^2} = 24.09 \text{ cm}$$

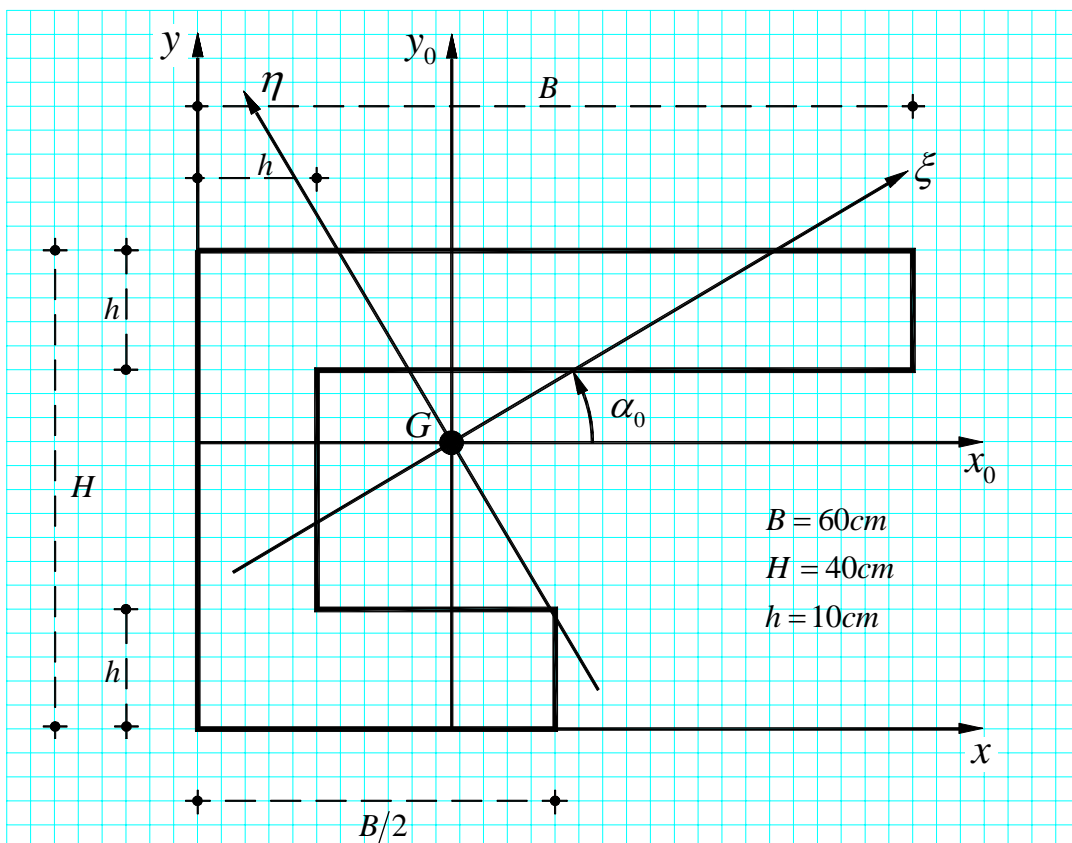


## 2. Determinazione degli assi principali centrali di inerzia

Nota la posizione del baricentro della sezione in esame nel riferimento  $(x, y)$ , si può procedere alla determinazione degli assi principali centrali di inerzia calcolando, rispetto ad un sistema di riferimento ortogonale baricentrico  $(x_0, y_0)$  come quello indicato in Figura, i momenti del secondo ordine  $I_{x_0}$ ,  $I_{y_0}$  e  $I_{x_0 y_0}$ , della sezione e ciò applicando l'espressione:

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2I_{x_0 y_0}}{I_{x_0} - I_{y_0}}$$

che fornisce l'angolo  $\alpha_0$ , positivo se antiorario, che la direzione principale  $\xi$  forma con l'asse  $x_0$ ; la direzione principale  $\eta$ , essendo ortogonale a  $\xi$ , risulta così anch'essa univocamente determinata.



Il calcolo dei momenti del secondo ordine rispetto al riferimento  $(x_0, y_0)$  è effettuato avvalendosi della proprietà additiva per i momenti del secondo ordine, sfruttando la scomposizione in tre rettangoli operata in precedenza e applicando, ove necessario, il teorema del trasporto.

## 2.1 Calcolo del momento di inerzia della sezione rispetto all'asse $x_0$

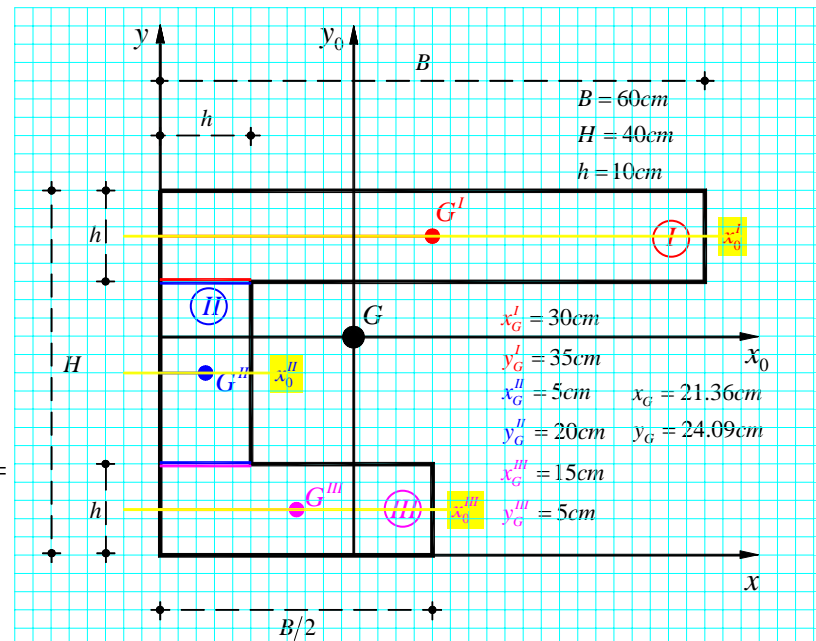
Il momento di inerzia della sezione rispetto all'asse  $x_0$  è dato dalla somma dei momenti di inerzia rispetto all'asse  $x_0$  dei singoli rettangoli  $I$ ,  $II$  e  $III$ , cioè:

$$I_{x_0} = I_{x_0}^I + I_{x_0}^{II} + I_{x_0}^{III}$$

Per la valutazione di  $I_{x_0}^I$ ,  $I_{x_0}^{II}$  e  $I_{x_0}^{III}$  si applica il teorema del trasporto; nel seguito  $I_{x_0}^I$  indica il momento di inerzia del rettangolo  $I$  rispetto ad un asse  $x_0^I$  parallelo all'asse  $x_0$  e passante per il baricentro  $G^I$ , analogamente  $I_{x_0}^{II}$  indica il momento di inerzia del rettangolo  $II$  rispetto ad un asse  $x_0^{II}$  parallelo all'asse  $x_0$  e passante per il baricentro  $G^{II}$  e infine  $I_{x_0}^{III}$  indica il momento di inerzia del rettangolo  $III$  rispetto ad un asse  $x_0^{III}$  parallelo all'asse  $x_0$  e passante per il baricentro  $G^{III}$ .

$$\begin{aligned} I_{x_0}^I &= I_{x_0^I}^I + A^I (y_G^I - y_G)^2 = \\ &= \frac{1}{12} B h^3 + (B h) (y_G^I - y_G)^2 = \\ &= \frac{1}{12} (60 \cdot 10^3) + (60 \cdot 10) (35 - 24.09)^2 = \\ &= 76416.86 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{x_0}^{II} &= I_{x_0^{II}}^{II} + A^{II} (y_G^{II} - y_G)^2 = \\ &= \frac{1}{12} h (H - 2h)^3 + [(H - 2h) h] (y_G^{II} - y_G)^2 = \\ &= \frac{1}{12} (10 \cdot 20^3) + (20 \cdot 10) (20 - 24.09)^2 = \\ &= 10012.29 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} I_{x_0}^{III} &= I_{x_0^{III}}^{III} + A^{III} (y_G^{III} - y_G)^2 = \frac{1}{12} \frac{B}{2} h^3 + \left( \frac{B}{2} h \right) (y_G^{III} - y_G)^2 = \\ &= \frac{1}{12} (30 \cdot 10^3) + (30 \cdot 10) (5 - 24.09)^2 = 111828.43 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Si ha in definitiva:

$$I_{x_0} = I_{x_0}^I + I_{x_0}^{II} + I_{x_0}^{III} = 76416.86 + 10012.29 + 111828.43 = 198257.58 \text{ cm}^4$$

## 2.2 Calcolo del momento di inerzia della sezione rispetto all'asse $y_0$

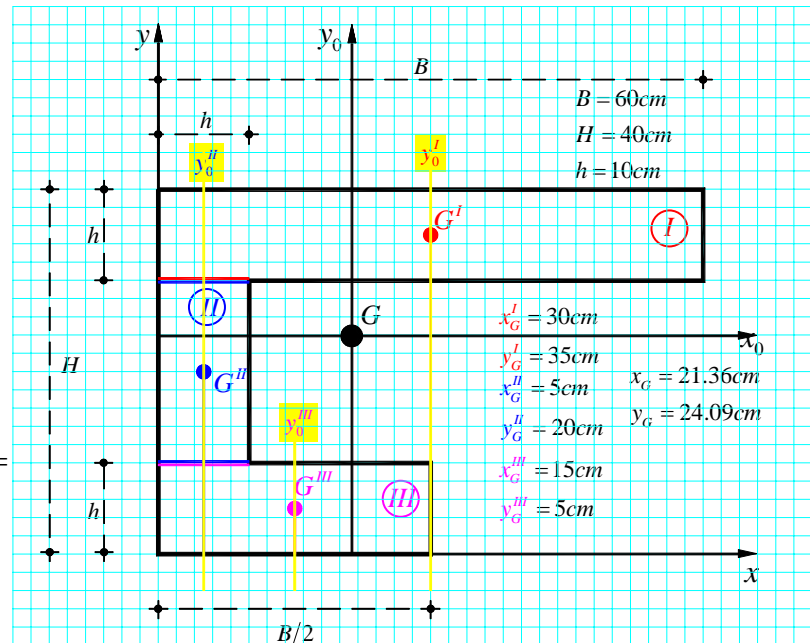
Il momento di inerzia della sezione rispetto all'asse  $y_0$  è dato dalla somma dei momenti di inerzia rispetto all'asse  $y_0$  dei singoli rettangoli  $I$ ,  $II$  e  $III$ , cioè:

$$I_{y_0} = I_{y_0}^I + I_{y_0}^{II} + I_{y_0}^{III}$$

Per la valutazione di  $I_{y_0}^I$ ,  $I_{y_0}^{II}$  e  $I_{y_0}^{III}$  si applica il teorema del trasporto; nel seguito  $I_{y_0}^I$  indica il momento di inerzia del rettangolo  $I$  rispetto ad un asse  $y_0^I$  parallelo all'asse  $y_0$  e passante per il baricentro  $G^I$ , analogamente  $I_{y_0}^{II}$  indica il momento di inerzia del rettangolo  $II$  rispetto ad un asse  $y_0^{II}$  parallelo all'asse  $y_0$  e passante per il baricentro  $G^{II}$  e infine  $I_{y_0}^{III}$  indica il momento di inerzia del rettangolo  $III$  rispetto ad un asse  $y_0^{III}$  parallelo all'asse  $y_0$  e passante per il baricentro  $G^{III}$ .

$$\begin{aligned} I_{y_0}^I &= I_{y_0^I}^I + A^I (x_G^I - x_G)^2 = \\ &= \frac{1}{12} h B^3 + (Bh)(x_G^I - x_G)^2 = \\ &= \frac{1}{12} (10 \cdot 60^3) + (60 \cdot 10)(30 - 21.36)^2 = \\ &= 224789.76 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{y_0}^{II} &= I_{y_0^{II}}^{II} + A^{II} (x_G^{II} - x_G)^2 = \\ &= \frac{1}{12} (H - 2h) \cdot h^3 + [(H - 2h)h](x_G^{II} - x_G)^2 = \\ &= \frac{1}{12} (20 \cdot 10^3) + (20 \cdot 10)(5 - 21.36)^2 = \\ &= 55196.59 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} I_{y_0}^{III} &= I_{y_0^{III}}^{III} + A^{III} (x_G^{III} - x_G)^2 = \frac{1}{12} h \left(\frac{B}{2}\right)^3 + \left(\frac{B}{2}h\right)(x_G^{III} - x_G)^2 = \\ &= \frac{1}{12} (10 \cdot 30^3) + (30 \cdot 10)(15 - 21.36)^2 = 34634.88 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Si ha in definitiva:

$$I_{y_0} = I_{y_0}^I + I_{y_0}^{II} + I_{y_0}^{III} = 224789.76 + 55196.59 + 34634.88 = 314621.23 \text{ cm}^4$$

### 2.3 Calcolo del momento di inerzia centrifugo rispetto agli assi $x_0$ e $y_0$

Il momento di inerzia centrifugo della sezione rispetto agli assi  $x_0$  e  $y_0$  è dato dalla somma dei momenti di inerzia centrifughi rispetto agli assi  $x_0$  e  $y_0$  dei singoli rettangoli *I*, *II* e *III*, cioè:

$$I_{x_0 y_0} = I_{x_0 y_0}^I + I_{x_0 y_0}^{II} + I_{x_0 y_0}^{III}$$

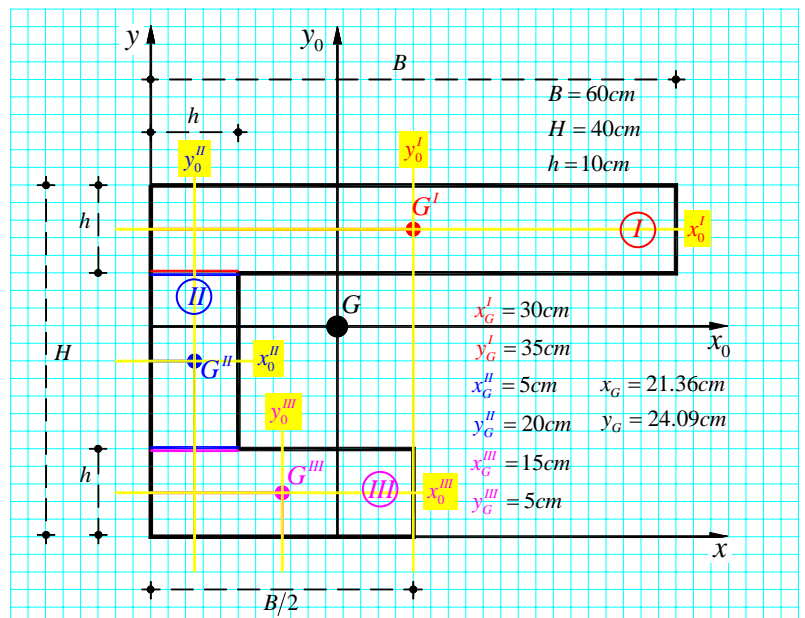
Per la valutazione di  $I_{x_0 y_0}^I$ ,  $I_{x_0 y_0}^{II}$  e  $I_{x_0 y_0}^{III}$  si applica il teorema del trasporto; nel seguito  $I_{x_0' y_0'}^I$  indica il momento di inerzia centrifugo del rettangolo *I* rispetto agli assi  $x_0'$  e  $y_0'$  passanti per il baricentro  $G^I$  e paralleli agli assi  $x_0$  e  $y_0$ , analogamente  $I_{x_0'' y_0''}^{II}$  indica il momento di inerzia centrifugo del rettangolo *II* rispetto agli assi  $x_0''$  e  $y_0''$  passanti per il baricentro  $G^{II}$  e paralleli agli assi  $x_0$  e  $y_0$ , e infine  $I_{x_0''' y_0'''}^{III}$  indica il momento di inerzia centrifugo del rettangolo *III* rispetto agli assi  $x_0'''$  e  $y_0'''$  passanti per il baricentro  $G^{III}$  e paralleli agli assi  $x_0$  e  $y_0$ . I momenti centrifughi  $I_{x_0' y_0'}^I$ ,  $I_{x_0'' y_0''}^{II}$  e  $I_{x_0''' y_0'''}^{III}$  sono riportati nelle formule che seguono solo per completezza, infatti essendo  $(x_0', y_0')$ ,  $(x_0'', y_0'')$  e  $(x_0''', y_0''')$  assi principali centrali di inerzia rispettivamente per i rettangoli *I*, *II* e *III* considerati, risulta  $I_{x_0' y_0'}^I = I_{x_0'' y_0''}^{II} = I_{x_0''' y_0'''}^{III} = 0$ .

$$\begin{aligned} I_{x_0 y_0}^I &= I_{x_0' y_0'}^I + A^I \left[ (x_G^I - x_G) (y_G^I - y_G) \right] = \\ &= (Bh) \left[ (x_G^I - x_G) (y_G^I - y_G) \right] = \\ &= (60 \cdot 10) \left[ (30 - 21.36) (35 - 24.09) \right] = \\ &= 56557.44 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{x_0 y_0}^{II} &= I_{x_0'' y_0''}^{II} + A^{II} \left[ (x_G^{II} - x_G) (y_G^{II} - y_G) \right] = \\ &= [(H - 2h)h] \left[ (x_G^{II} - x_G) (y_G^{II} - y_G) \right] = \\ &= (20 \cdot 10) \left[ (5 - 21.36) (20 - 24.09) \right] = \\ &= 13382.48 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{x_0 y_0}^{III} &= I_{x_0''' y_0'''}^{III} + A^{III} \left[ (x_G^{III} - x_G) (y_G^{III} - y_G) \right] = \left( \frac{B}{2} h \right) \left[ (x_G^{III} - x_G) (y_G^{III} - y_G) \right] = \\ &= (30 \cdot 10) \left[ (15 - 21.36) (5 - 24.09) \right] = 36423.72 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Si ha in definitiva:  $I_{y_0} = I_{x_0 y_0}^I + I_{x_0 y_0}^{II} + I_{x_0 y_0}^{III} = 56557.44 + 13382.48 + 36423.72 = 106363.64 \text{ cm}^4$



## 2.4 Assi principali centrali di inerzia

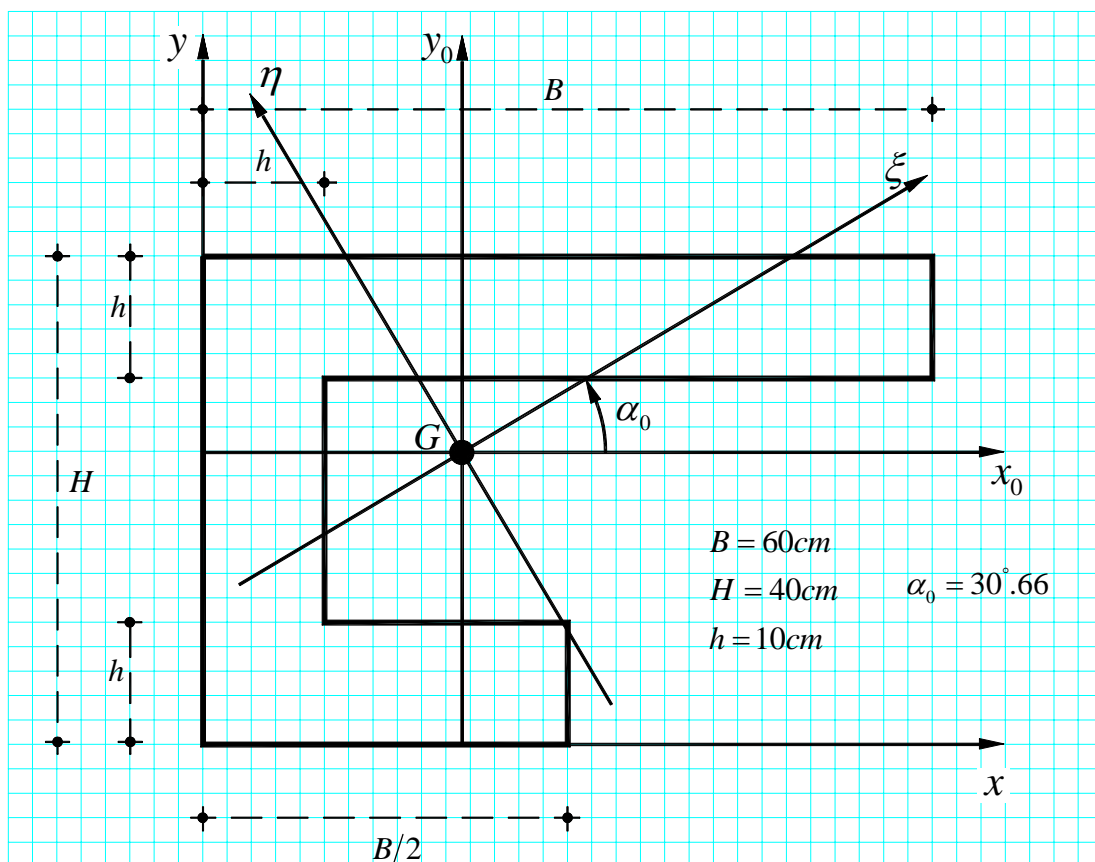
Noti i momenti del secondo ordine  $I_{x_0}$ ,  $I_{y_0}$  e  $I_{x_0y_0}$ , come precedentemente osservato, si può utilizzare l'espressione che fornisce l'angolo  $\alpha_0$ , positivo se antiorario, che la direzione principale  $\xi$  forma con l'asse  $x_0$ . Si calcola:

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2I_{x_0y_0}}{I_{x_0} - I_{y_0}} = -\frac{2 \cdot 106363.64}{198257.58 - 314621.23} = 1.83$$

e, in definitiva:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan\left(-\frac{2I_{x_0y_0}}{I_{x_0} - I_{y_0}}\right) = \frac{1}{2} \arctan(1.8281) = 30^\circ.66$$

che permette di tracciare l'asse principale  $\xi$  e, per quanto già osservato, l'asse principale  $\eta$  ad esso ortogonale e passante per il baricentro, così come indicato in Figura.





### 3. Determinazione dell'ellisse centrale di inerzia

L'ellisse centrale di inerzia, riferita agli assi principali centrali di inerzia  $\xi$  e  $\eta$ , ha equazione:

$$\frac{\xi^2}{\rho_\eta^2} + \frac{\eta^2}{\rho_\xi^2} = 1$$

nella quale  $\rho_\xi$  e  $\rho_\eta$  sono i semiassi dell'ellisse che coincidono, com'è noto, con i raggi giroatori di inerzia della sezione espressi da:

$$\rho_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{A}}, \quad \rho_\eta = \sqrt{\frac{I_\eta}{A}}.$$

Nelle relazioni precedenti:  $A$  è l'area totale della sezione in esame;  $I_\xi$  e  $I_\eta$  sono i momenti principali centrali di inerzia della sezione esprimibili in funzione dei momenti del secondo ordine  $I_{x_0}$ ,  $I_{y_0}$  e  $I_{x_0y_0}$  rispetto al sistema di riferimento  $(x_0, y_0)$  baricentrico considerato in precedenza e quindi in funzione di quantità già calcolate.

I momenti principali centrali di inerzia  $I_\xi$  e  $I_\eta$  sono forniti dalla relazione:

$$\left. \begin{array}{l} I_\xi \\ I_\eta \end{array} \right\} = \frac{I_{x_0} + I_{y_0}}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_0} - I_{y_0})^2 + 4I_{x_0y_0}^2} =$$

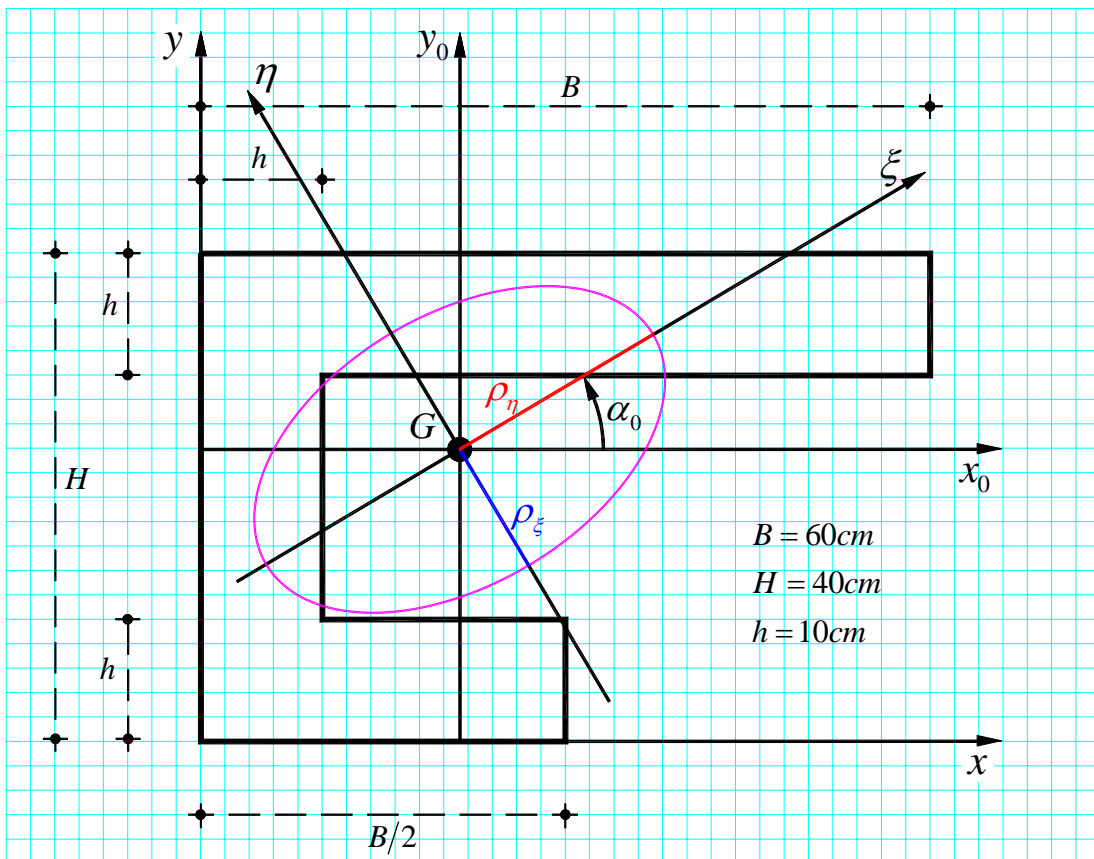
$$= \frac{198257.58 + 314621.23}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(198257.58 - 314621.23)^2 + 4 \cdot (106363.64)^2} = \begin{cases} 135202.66 \text{ cm}^4 \\ 377676.15 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

Si ricorda che in un riferimento principale di inerzia, per definizione, il momento di inerzia centrifugo è nullo; cioè  $I_{\xi\eta} = 0$ . Si noti, inoltre, che, essendo per la sezione in esame  $I_{x_0} < I_{y_0}$ , deve risultare  $I_\xi < I_\eta$ .

Noti  $I_\xi$  e  $I_\eta$ , si possono in definitiva calcolare i raggi giratori di inerzia, si ha:

$$\rho_\xi = \sqrt{\frac{I_{\xi G}}{A}} = \sqrt{\frac{135202.66}{1100}} = 11.09 \text{ cm}, \quad \rho_\eta = \sqrt{\frac{I_{\eta G}}{A}} = \sqrt{\frac{377676.15}{1100}} = 18.53 \text{ cm}$$

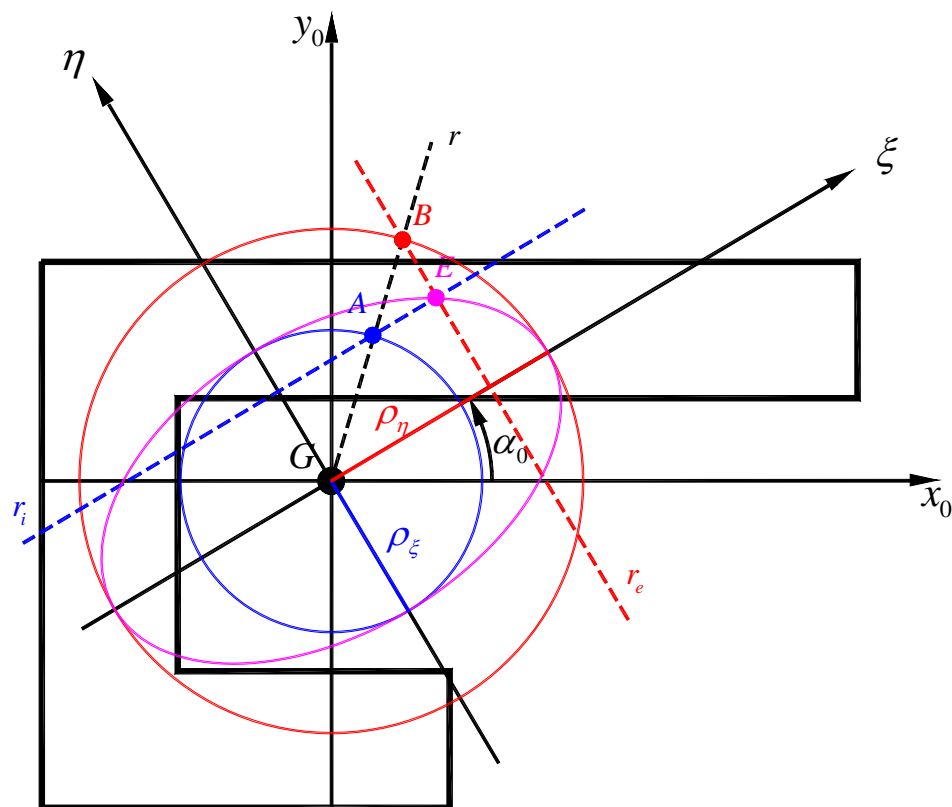
Questi ultimi definiscono l'equazione dell'ellisse centrale di inerzia nel riferimento principale  $(\xi, \eta)$  permettendone così la sua individuazione (effettuabile per punti ad esempio) così come indicato in Figura.



L'individuazione dell'ellisse, noti i semiassi  $\rho_\xi$  e  $\rho_\eta$ , può condursi anche sfruttando una semplice costruzione grafica di seguito illustrata e riportata schematicamente in Figura.

### Costruzione grafica di un'ellisse noti che siano i suoi semiassi

1. Tracciare i semiassi e le circonferenze di centro  $G$  aventi per raggi i semiassi stessi;
2. Tracciata per  $G$  la generica semiretta  $r$ , condurre dalla sua intersezione  $A$  con la circonferenza interna la retta  $r_i$  parallela al semiasse maggiore, e dall'intersezione  $B$  con la circonferenza esterna la retta  $r_e$  parallela al semiasse minore;
3. Il punto  $E$  intersezione di  $r_i$  e  $r_e$  è punto dell'ellisse;
4. Ripetere la costruzione per un numero di punti sufficiente alla costruzione dell'ellisse.



#### 4. Determinazione del nocciolo centrale di inerzia

Il nocciolo centrale di inerzia di una figura piana è il luogo dei centri relativi delle rette del piano che non tagliano la figura o, nella polarità d'inerzia di centro il baricentro  $G$  della figura (polarità esistente tra le rette del piano e i simmetrici rispetto a  $G$  dei loro centri relativi), il nocciolo centrale di inerzia è il luogo degli antipoli delle rette del piano che non tagliano la figura. Il nocciolo è qui di seguito individuato attraverso la costruzione del suo contorno e ciò, in particolare, attraverso la determinazione della posizione dei vertici dello stesso, determinati come antipoli delle rette tangenti alla frontiera (o contorno) della figura resa convessa. Il contorno del nocciolo centrale di inerzia della sezione in esame è quindi una figura a 5 vertici ciascuno dei quali rappresenta l'antipolo di una delle tangenti al contorno della sezione resa convessa.

##### 4.1 Metodo analitico

Le coordinate dei vertici  $R_i$  ( $i=1,2,\dots,5$ ) del nocciolo centrale di inerzia possono essere calcolate nel riferimento ortogonale  $(x_0, y_0)$  prima considerato previa determinazione, nello stesso riferimento, delle equazioni delle rette  $r_i$  ( $i=1,2,\dots,5$ ) tangenti al contorno della figura resa convessa. Nota infatti l'equazione di una retta nel riferimento  $(x_0, y_0)$ , nella forma  $a x + b y + 1 = 0$ , dove  $x$  e  $y$  sono da intendersi valutate nel riferimento  $(x_0, y_0)$  e il pedice  $0$  è omissso per comodità, il suo antipolo, nello stesso riferimento, ha coordinate  $P \equiv (x_p, y_p)$  fornite da:

$$x_p = (a I_{y_0} + b I_{x_0 y_0}) / A; \quad y_p = (a I_{x_0 y_0} + b I_{x_0}) / A$$

nelle quali compaiono, oltre ai coefficienti  $a$  e  $b$  dell'equazione della retta considerata, l'area  $A$  della sezione e i momenti del secondo ordine della stessa sezione rispetto al riferimento  $(x_0, y_0)$  valutati in precedenza.

In particolare: per rette di equazione  $y = -1/b$ , cioè parallele all'asse  $x_0$ , ponendo per semplicità  $q = -1/b$ , dalle precedenti risulta:

$$x_p = -\frac{I_{x_0 y_0}}{qA}; \quad y_p = -\frac{I_{x_0}}{qA}$$

per rette di equazione  $x = -1/a$ , quindi parallele all'asse  $y_0$ , ponendo  $q^* = -1/a$  si ha invece:

$$x_p = -\frac{I_{y_0}}{q^* A}; \quad y_p = -\frac{I_{x_0 y_0}}{q^* A}$$

Con riferimento alla Figura, le rette tangenti al contorno della sezione resa convessa hanno, nel riferimento  $(x_0, y_0)$ , le seguenti equazioni:

retta  $r_1$  (parallela all'asse  $x_0$ ):  $y = H - y_G = 15.91$ ;

retta  $r_2$  (parallela all'asse  $y_0$ ):  $x = -x_G = -21.36$ ;

retta  $r_3$  (parallela all'asse  $x_0$ ):  $y = -y_G = -24.09$ ;

retta  $r_4$  (passante per i punti  $A \equiv (x_A, y_A)$  e  $B \equiv (x_B, y_B)$ ):  $a_{r_4} x + b_{r_4} y + 1 = -0.03x + 0.03y + 1 = 0$ ,

avendo valutato, con riferimento alla Figura, le coordinate dei punti  $A$  e  $B$  che risultano:

$$\begin{cases} x_A = B - x_G = 60 - 21.36 = 38.64 \\ y_A = H - h - y_G = 40 - 10 - 24.09 = 5.91 \end{cases} \quad \begin{cases} x_B = B/2 - x_G = 30 - 21.36 = 8.64 \\ y_B = -y_G = -24.09 \end{cases}$$

ed essendo:

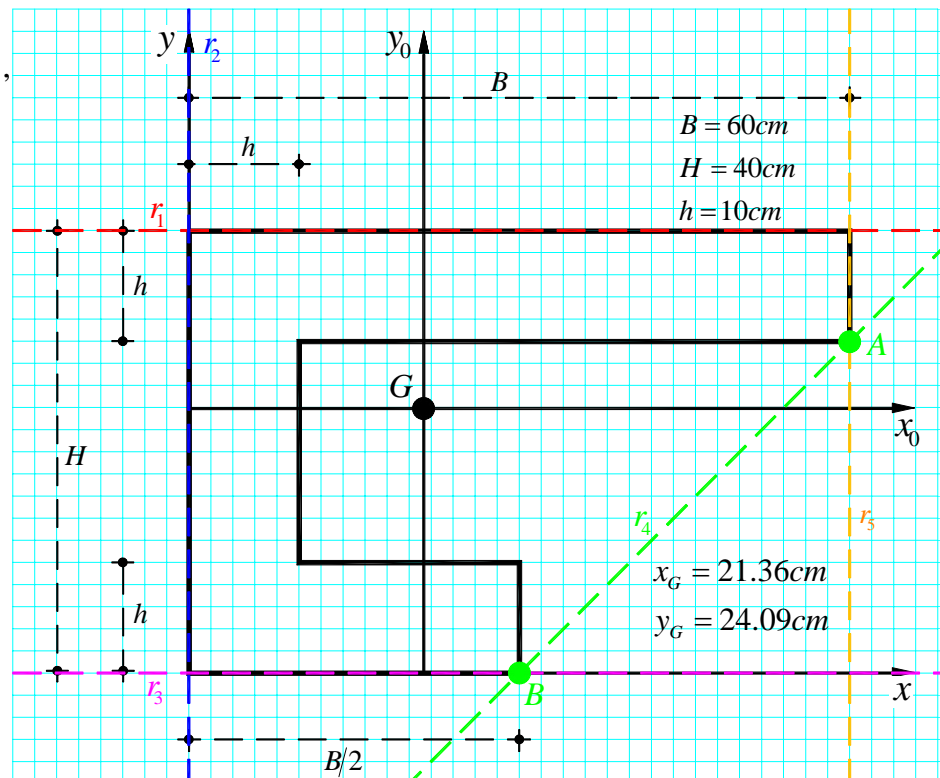
$$a_{r_4} = \frac{y_B - y_A}{x_B y_A - x_A y_B} = -0.03; \quad b_{r_4} = \frac{x_A - x_B}{x_B y_A - x_A y_B} = 0.03.$$

retta  $r_5$  (parallela all'asse  $y_0$ ):  $x = B - x_G = 38.64$ ;

Riepilogando, nel riferimento  $(x_0, y_0)$ ,

le rette tangenti alla figura resa convessa hanno equazioni:

$$\begin{cases} r_1: & y = 15.91 \\ r_2: & x = -21.36 \\ r_3: & y = -24.09 \\ r_4: & -0.03x + 0.03y + 1 = 0 \\ r_5: & x = 38.64 \end{cases}$$



Applicando le formule prima richiamate, si possono quindi calcolare le coordinate dei vertici  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  e  $R_5$ , antipoli rispettivamente delle rette  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ ,  $r_4$  e  $r_5$ . Si calcola:

coordinate punto  $R_1$  (antipolo della retta  $r_1$  di equazione  $y = 15.91$ , parallela all'asse  $x_0$ ):

$$x_{R_1} = -\frac{I_{x_0 y_0}}{qA} = -\frac{106363.64}{15.91 \cdot 1100} = -6.07 \text{ cm}; \quad y_{R_1} = -\frac{I_{x_0}}{qA} = -\frac{198257.58}{15.91 \cdot 1100} = -11.33 \text{ cm};$$

coordinate punto  $R_2$  (antipolo della retta  $r_2$  di equazione  $x = -21.36$ , parallela all'asse  $y_0$ ):

$$x_{R_2} = -\frac{I_{y_0}}{q^*A} = -\frac{314621.23}{(-21.36) \cdot 1100} = 13.39 \text{ cm}; \quad y_{R_2} = -\frac{I_{x_0 y_0}}{q^*A} = -\frac{106363.64}{(-21.36) \cdot 1100} = 4.53 \text{ cm};$$

coordinate punto  $R_3$  (antipolo della retta  $r_3$  di equazione  $y = -24.09$ , parallela all'asse  $x_0$ ):

$$x_{R_3} = -\frac{I_{x_0 y_0}}{qA} = -\frac{106363.64}{(-24.09) \cdot 1100} = 4.01 \text{ cm}; \quad y_{R_3} = -\frac{I_{x_0}}{qA} = -\frac{198257.58}{(-24.09) \cdot 1100} = 7.48 \text{ cm};$$

coordinate punto  $R_4$  (antipolo della retta  $r_4$  di equazione  $a_{r_4} x + b_{r_4} y + 1 = -0.03 x + 0.03 y + 1 = 0$ ):

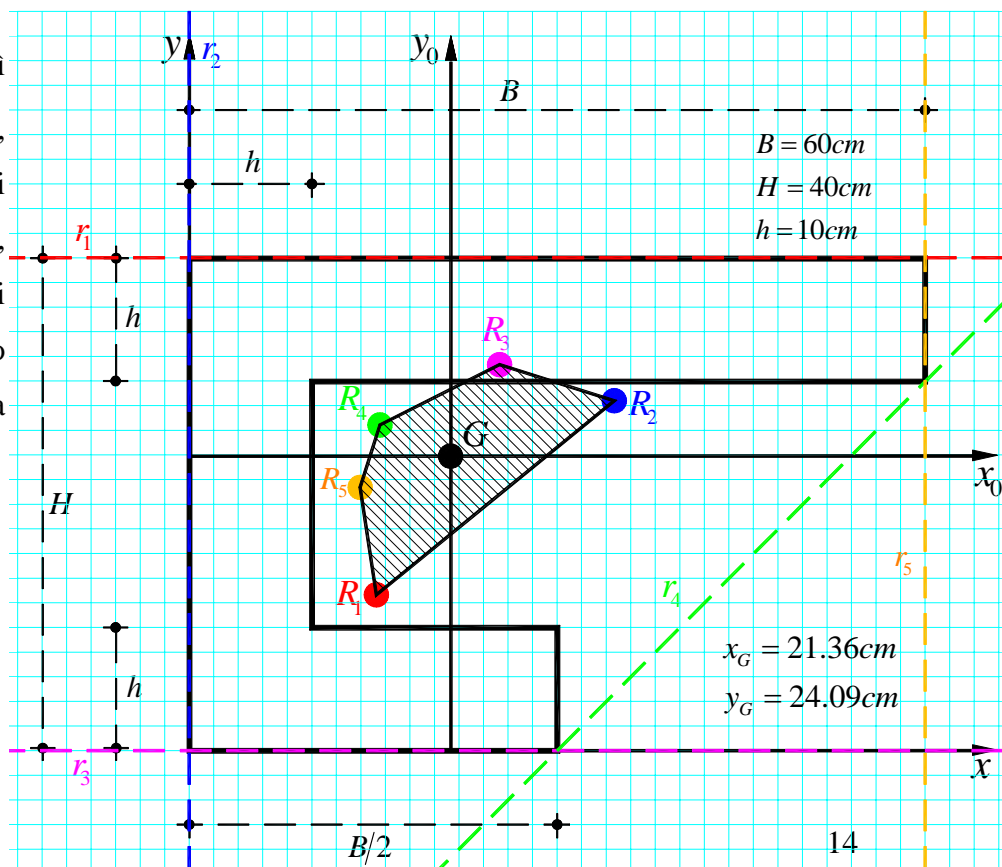
$$x_{R_4} = (a_{r_4} I_{y_0} + b_{r_4} I_{x_0 y_0}) / A = (-0.03 \cdot 314621.23 + 0.03 \cdot 106363.64) / 1100 = -5.68 \text{ cm};$$

$$y_{R_4} = (a_{r_4} I_{x_0 y_0} + b_{r_4} I_{x_0}) / A = (-0.03 \cdot 106363.64 + 0.03 \cdot 198257.58) / 1100 = 2.51 \text{ cm}.$$

coordinate punto  $R_5$  (antipolo della retta  $r_5$  di equazione  $x = 38.64$ , parallela all'asse  $y_0$ ):

$$x_{R_5} = -\frac{I_{y_0}}{q^*A} = -\frac{314621.23}{38.64 \cdot 1100} = -7.40 \text{ cm}; \quad y_{R_5} = -\frac{I_{x_0 y_0}}{q^*A} = -\frac{106363.64}{38.64 \cdot 1100} = -2.50 \text{ cm};$$

Unendo i punti  $R_i$  così individuati si ottiene il contorno, e quindi il nocciolo centrale di inerzia della sezione in esame, come illustrato in Figura. Si ricorda che i lati del nocciolo sono le antipolari dei vertici della sezione.



## 4.2 Metodo grafico

In alternativa alla procedura analitica prima esposta, di seguito si propone un metodo grafico per l'individuazione dei vertici del nocciolo centrale d'inerzia. Il metodo è riportato in sintesi, per passi operativi sequenziali e relativamente alla determinazione di un solo vertice del nocciolo della sezione in esame, essendo la costruzione grafica facilmente ripetibile per i restanti vertici. La costruzione è quella che consente, data una figura piana della quale si sia determinata l'ellisse centrale d'inerzia, di individuare l'antipolo  $R$  di una qualsiasi retta  $r$  del piano. Essa si basa su una relazione notevole della polarità d'inerzia di centro  $G$ , nota come relazione di coniugio, espressa da:

$$\rho_{r_0}^2 = \overline{GR} \cdot \overline{GR'}$$

nella quale:

$r_0$  è la retta parallela ad  $r$  e passante per il baricentro  $G$  della figura;

$\rho_{r_0}$  è il raggio giratore d'inerzia rispetto a  $r_0$ , definito dal semidiametro dell'ellisse appartenente alla direzione  $r^*$  coniugata ad  $r$ ;

$R$  è l'antipolo della retta  $r$ ;

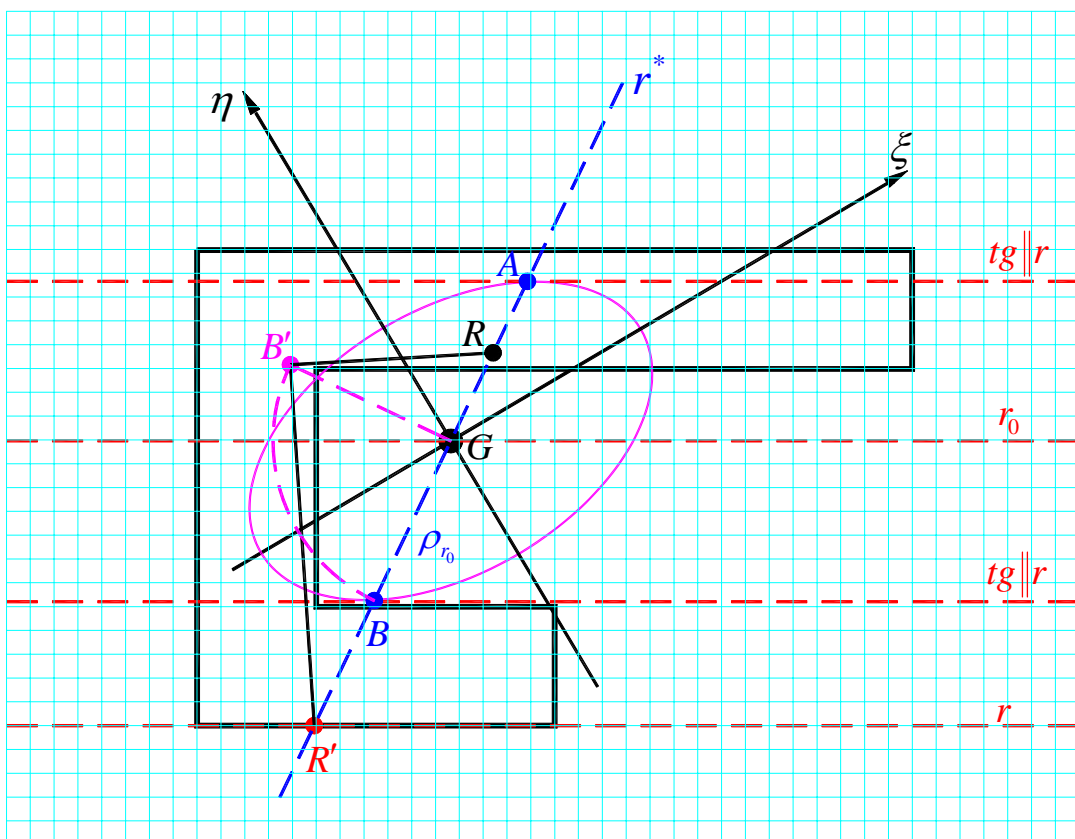
$R'$  è il coniugato di  $R$ ;

$\overline{GR}$  e  $\overline{GR'}$  individuano i segmenti rispetto ai quali  $\rho_{r_0}$  è medio proporzionale, come stabilito dalla relazione di coniugio.

Si rimanda ai libri di testo consigliati per i fondamenti teorici sui quali si basa la costruzione proposta.

Con riferimento alla Figura, i passi operativi della costruzione proposta sono:

- #1 Nota l'ellisse centrale di inerzia e fissata la tangente  $r$ , della quale si vuole individuare l'antipolo  $R$ , si tracciano le tangenti all'ellisse parallele a  $r$ , individuando così i punti di tangenza  $A$  e  $B$ ;
- #2 La retta passante per i punti di tangenza  $A$  e  $B$  è la direzione  $r^*$  coniugata ad  $r$ , la sua intersezione con  $r$  è il punto  $R'$ , coniugato di  $R$ ; il raggio giratore  $\rho_{r_0}$  coincide con il semidiametro  $\overline{GB}$  (o  $\overline{GA}$ );
- #3 Si ruota  $\overline{GB}$  di  $90^\circ$  si da disporlo sull'ortogonale per  $G$  alla direzione coniugata  $r^*$ , sia  $\overline{GB'}$  il segmento così ottenuto;
- #4 Si unisce  $R'$  con  $B'$  e si conduce per  $B'$  l'ortogonale a  $\overline{R'B'}$  sino ad intersecare la direzione coniugata  $r^*$  in  $R$ , antipolo della retta  $r$  considerata e vertice del nocciolo centrale di inerzia della sezione.



Ripetendo la costruzione per le altre 4 tangenti alla figura resa convessa si individua in modo completo il nocciolo centrale di inerzia della sezione.



### 5. Calcolo del momento di inerzia rispetto alla retta "r"

Si calcola infine il momento di inerzia della sezione rispetto alla retta  $r$  mostrata in Figura. Tale momento può essere calcolato utilizzando il teorema del trasporto; nel seguito  $I_{y_0}$  indica il momento di inerzia della sezione rispetto all'asse  $y_0$ , baricentrico e parallelo alla retta  $r$ .

Momento di inerzia della sezione rispetto alla retta  $r$

$$I_r = I_{y_0} + A \cdot (B + c - x_G)^2 = 314621.23 + 1100 \cdot (60 + 10 - 21.36)^2 = 2917055.79 \text{ cm}^4$$

