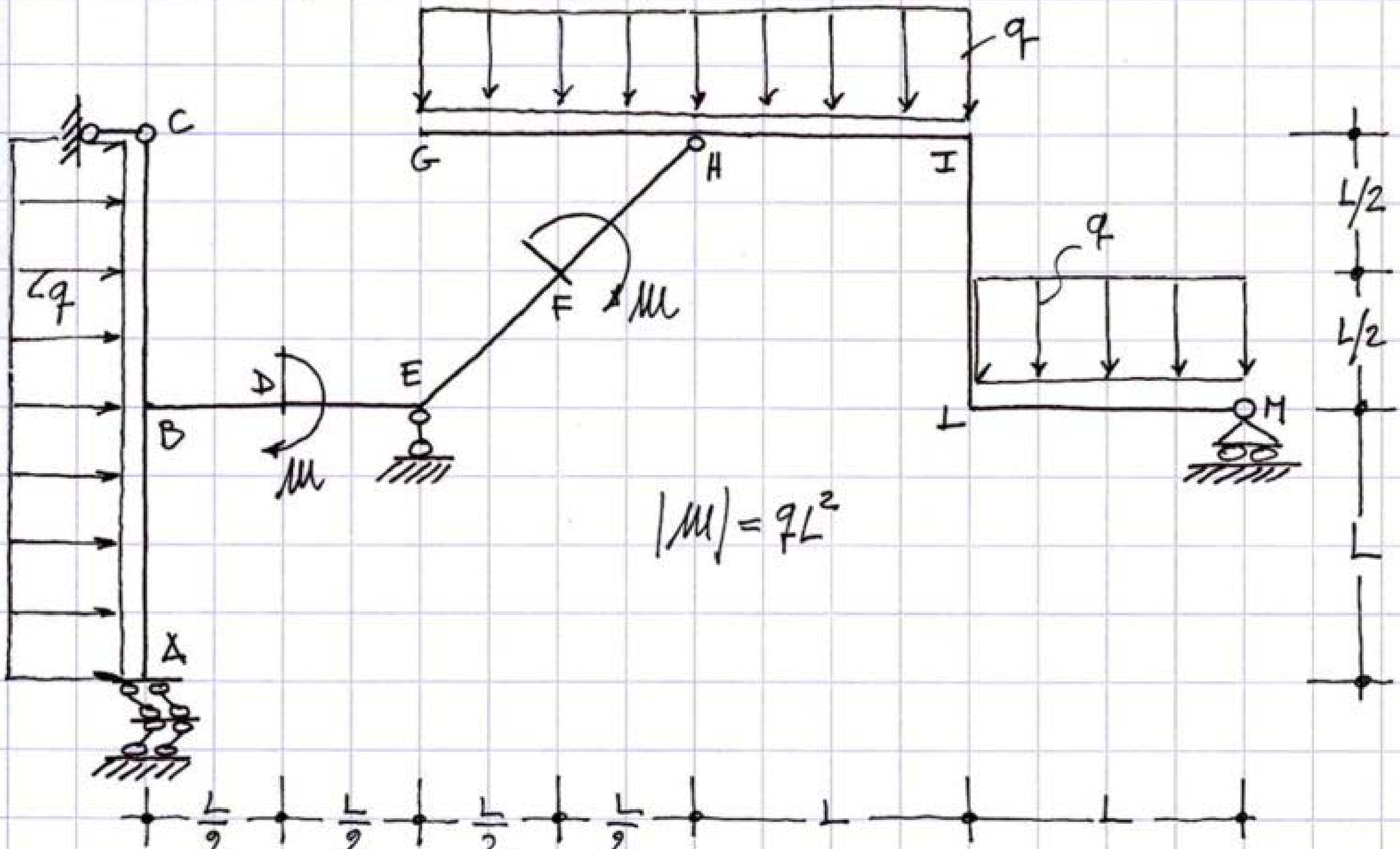
ESERCIZIO #2

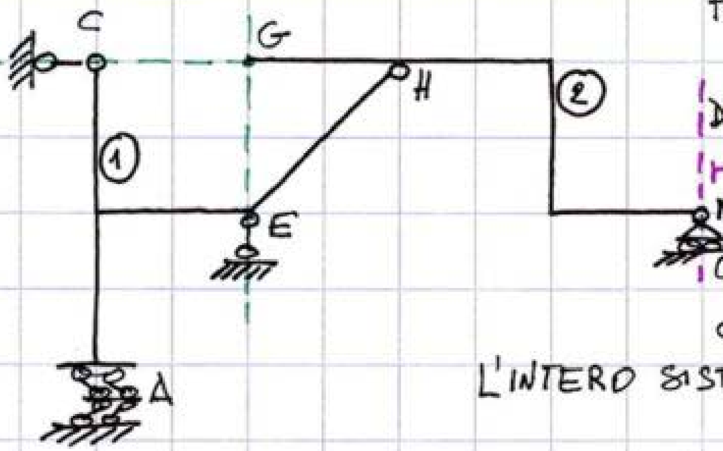
DETERMINARE LE REAZIONI VINCOLARI (RV), LE FUNZIONI CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE (CS) E I RELATIVI DIAGRAMMI PER LA STRUTTURA SEGUENTE:



- GRADO DI LABILITÀ APPARENTE

$$l = 3N - \mu_t = 3 \times 2 - (1+1+1+2+1) = 0$$ ⇨ C.N. per l'isostaticità ok!

- EFFICACIA CINEMATICA VINCOLI



PENDOLO C + PENDOLO E =
= CERNIERA IDEALE in G ⇨ $C^{①} \equiv G$

DOPPIO BIPENDOLO A ⇨ $C^{①} \in r_\infty$

⇨ $\nexists\, C^{①}$ ⇨ PORZIONE ① ISOSTATICA

CERNIERA H ⇨ $C^{②} \equiv H$

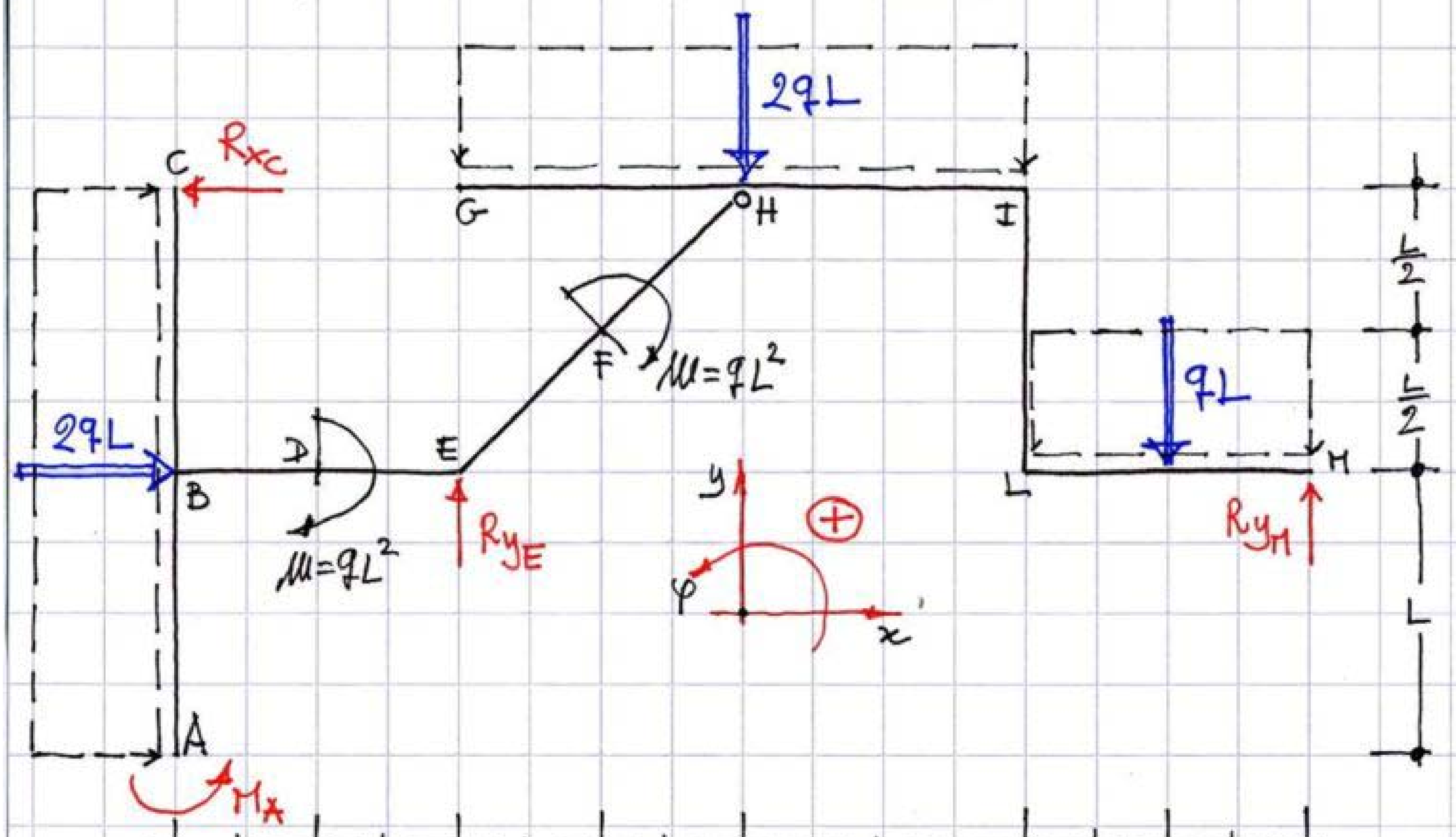
CARRELLO M ⇨ $C^{②} \in r$ ⇨ $\nexists\, C^{②}$

L'INTERO SISTEMA È QUINDI ISOSTATICO!

• DETERMINAZIONE DELLE REAZIONI VINCOLARI (RV)

RV - metodo analitico

1. Ai fini della valutazione delle RV i carichi distribuiti possono essere sostituiti con carichi concentrati equivalenti.
2. Si risolve il sistema in termini di reazioni vincolari esterne, a tal fine i vincoli esterni sono sostituiti dalle reazioni che essi sono potenzialmente in grado di esplicare. Tali reazioni si applicano con versi arbitrari.
3. Si hanno in questo caso 4 componenti di reazione incognite, si scrivono: 3 equazioni di equilibrio globale (riferite cioè all'intero sistema ignorando in questa fase la presenza del vincolo interno H); 1 equazione di equilibrio parziale, quest'ultima tenendo conto della funzione cinematica della cerniera interna H (per esempio in questo caso si impone che la porzione ② non ruoti rispetto alla porzione ①).



$$\Sigma F_x = 0 \rightsquigarrow -R_{x_C} + 2qL = 0 \rightsquigarrow \boxed{R_{x_C} = 2qL} \ (1)$$

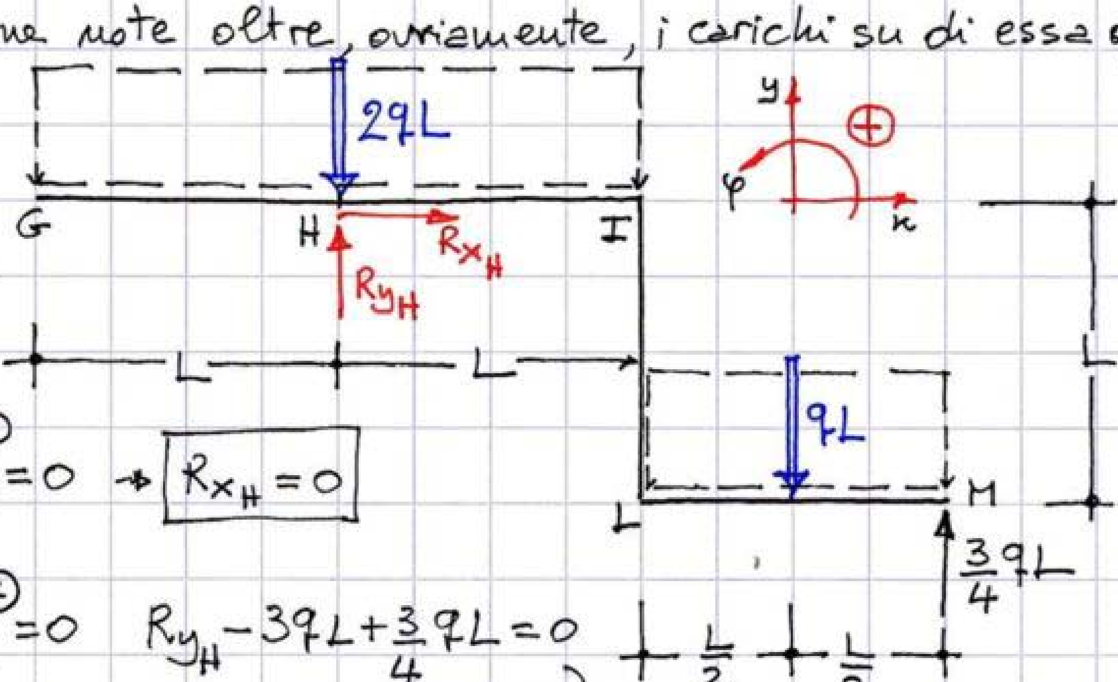
$$\Sigma F_y = 0 \rightsquigarrow R_{y_E} - 2qL - qL + R_{y_M} = 0 \rightsquigarrow \boxed{R_{y_E} = \frac{9}{4}qL} \ (3)$$

$$\Sigma M_E = 0 \rightsquigarrow R_{x_C} \cdot L - \mathcal{M} + M_A - \mathcal{M} - 2qL^2 - qL \cdot \frac{5}{2}L + R_{y_M} \cdot 3L = 0 \rightarrow \boxed{M_A = \frac{9}{4}qL^2} \ (4)$$

$$\Sigma M_H^{(2)} = 0 \rightsquigarrow R_{y_M} \cdot 2L - qL \cdot \frac{3}{2}L = 0 \rightsquigarrow \boxed{R_{y_M} = \frac{3}{4}qL} \ (2)$$

N.B.: (1) = primo risultato; (2) = secondo risultato; (3) = terzo risultato (ottenuto per sostituzione di (2)); (4) = ...

4. Le componenti di reazione interna della cerniera H possono trovarsi indifferentemente imponendo l'equilibrio di (1) o di (2). A tal fine sostituendo la cerniera interna H con le reazioni che essa è in grado di esplicare si impone l'equilibrio della porzione di struttura considerata applicando su di essa le reazioni esterne note oltre, ovviamente, i carichi su di essa agenti.



$$\Sigma F_x^{(2)} = 0 \rightarrow \boxed{R_{x_H} = 0}$$

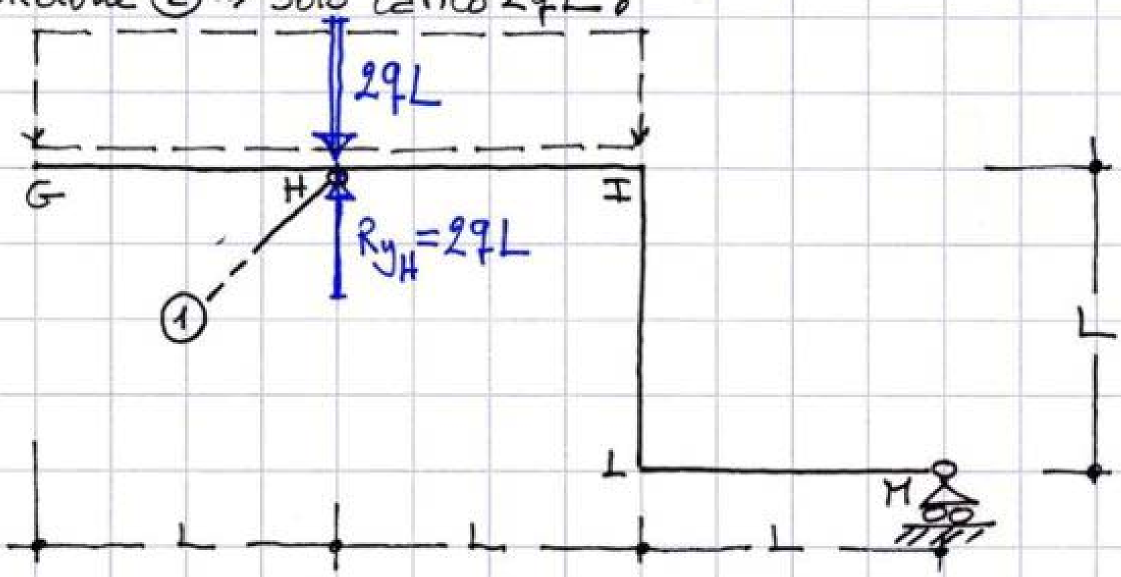
$$\Sigma F_y^{(2)} = 0 \quad R_{y_H} - 3qL + \frac{3}{4}qL = 0$$

$$\boxed{R_{y_H} = \frac{9}{4}qL}$$

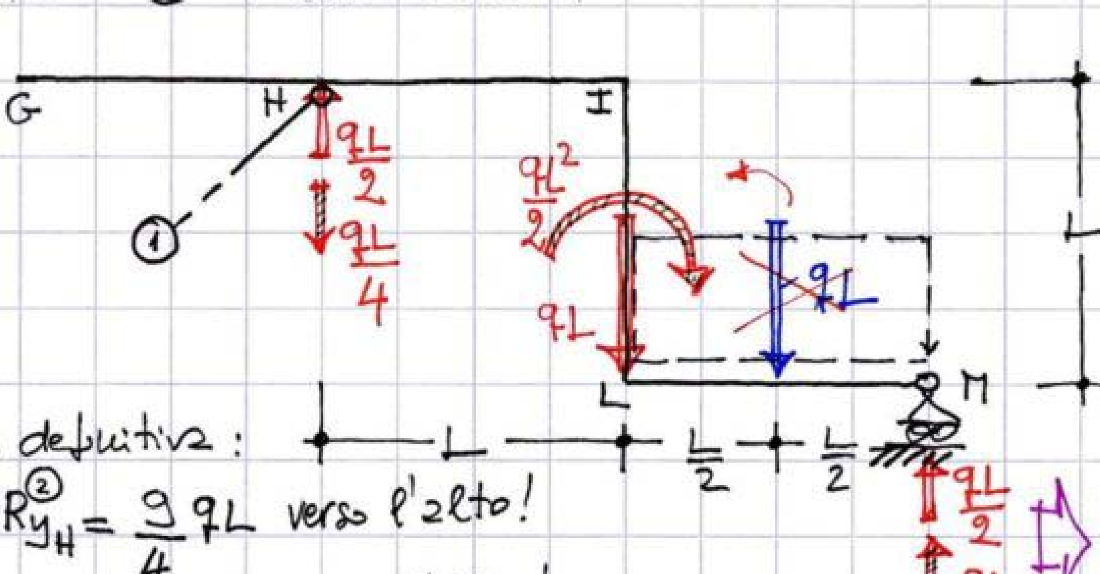
RV – metodo grafico

1. Il sistema non è isostatico per vincoli esterni ($\mu_e = 4$), tuttavia la porzione ② è un "tratto isostatico" (per tale tratto risulta $\mu_e + \mu_i = 3$).
2. Si risolve ② applicando il principio di sovrapposizione degli effetti valutando cioè separatamente le reazioni in H ed M per effetto del carico $2qL$ e del carico qL. Quest'ultimo, per comodità, è traslato parallelamente a se stesso sulla verticale IL.

PORZIONE ② → solo carico $2qL$!



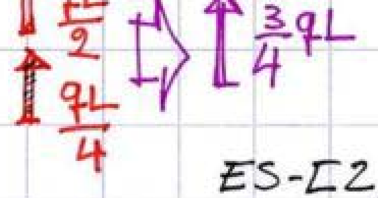
PORZIONE ② → solo carico qL



In definitiva:

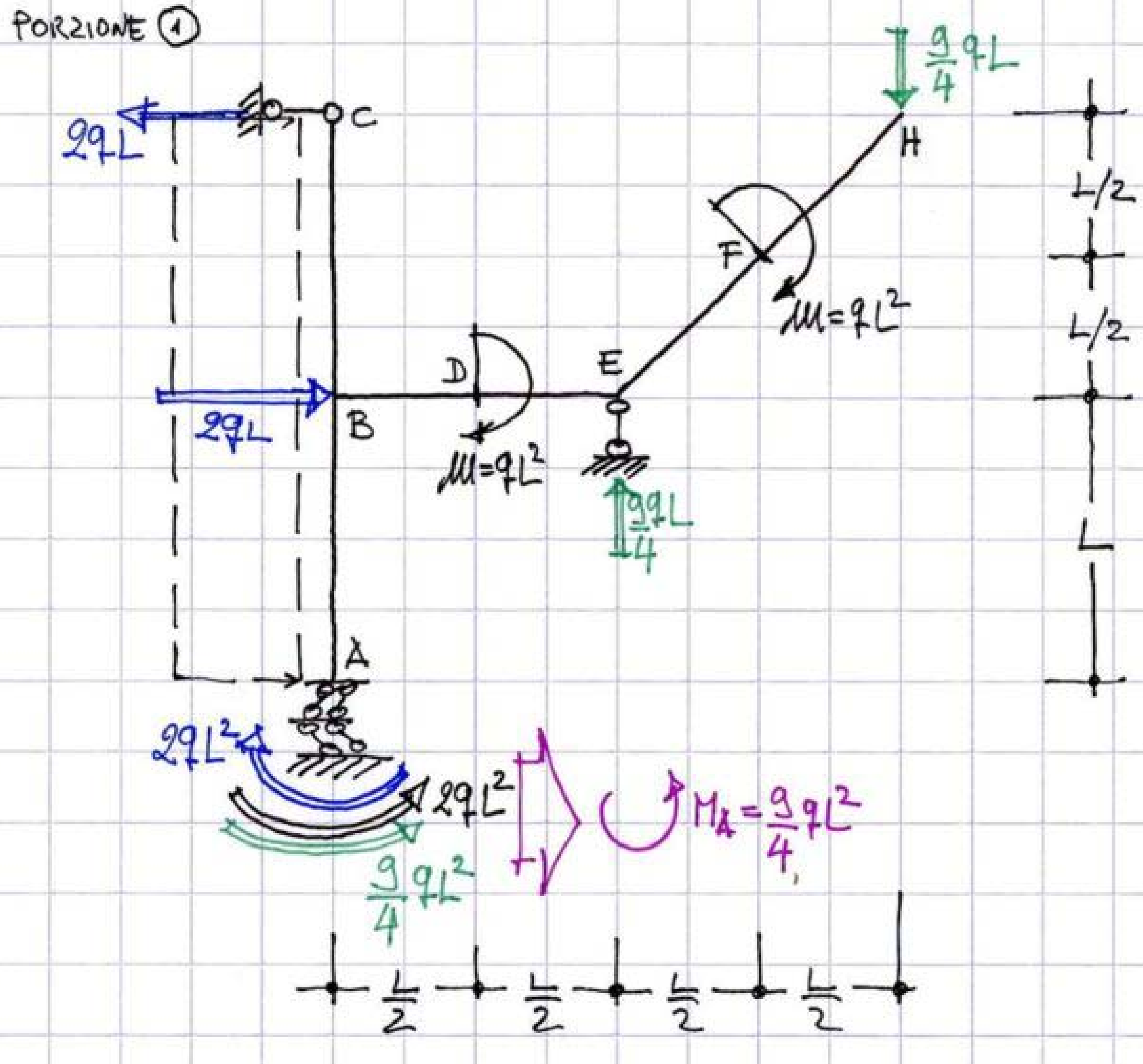
$R^{(2)}_{y_H} = \frac{9}{4} qL$ verso l'alto!

$R_{y_M} = \frac{3}{4} qL$ verso l'alto!



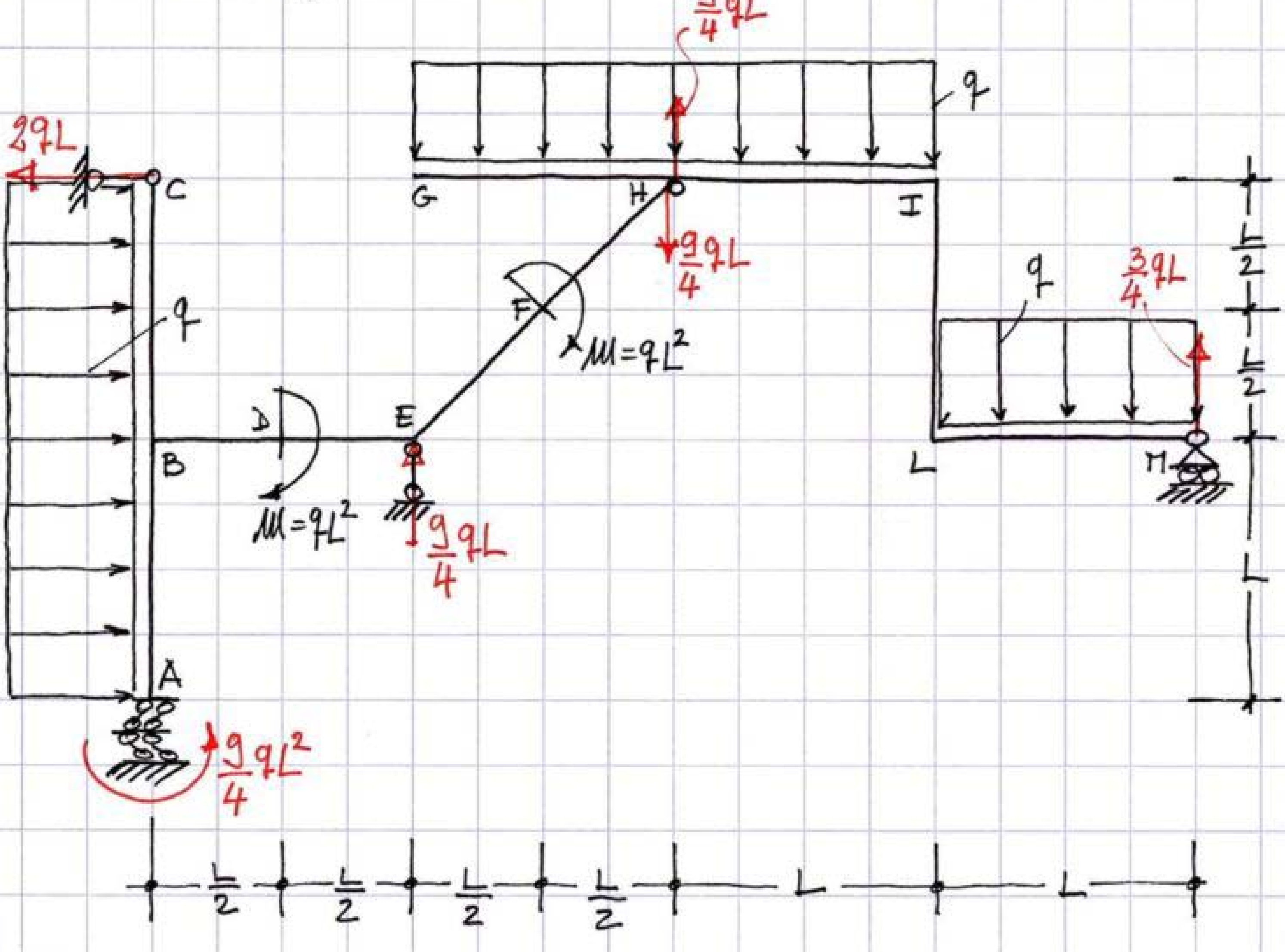
3. Le reazioni $Ry_H^{②}$ (reazione della cerniera interna H sulla porzione ②) ed Ry_M sono state ottenute sommando gli effetti computati sui due schemi di carico considerati.

4. Si risolve la porzione ① applicando ancora il principio di sovrapposizione degli effetti (la reazione $Ry_H^{①}$ e' ovviamente nota essendo pari a $-Ry_H^{②}$ e cioe' pari a $\frac{9}{4}qL$ verso il basso). Ogni colore individua una singola condizione di carico e le aliquote di reazioni vincolari ad essa relative.



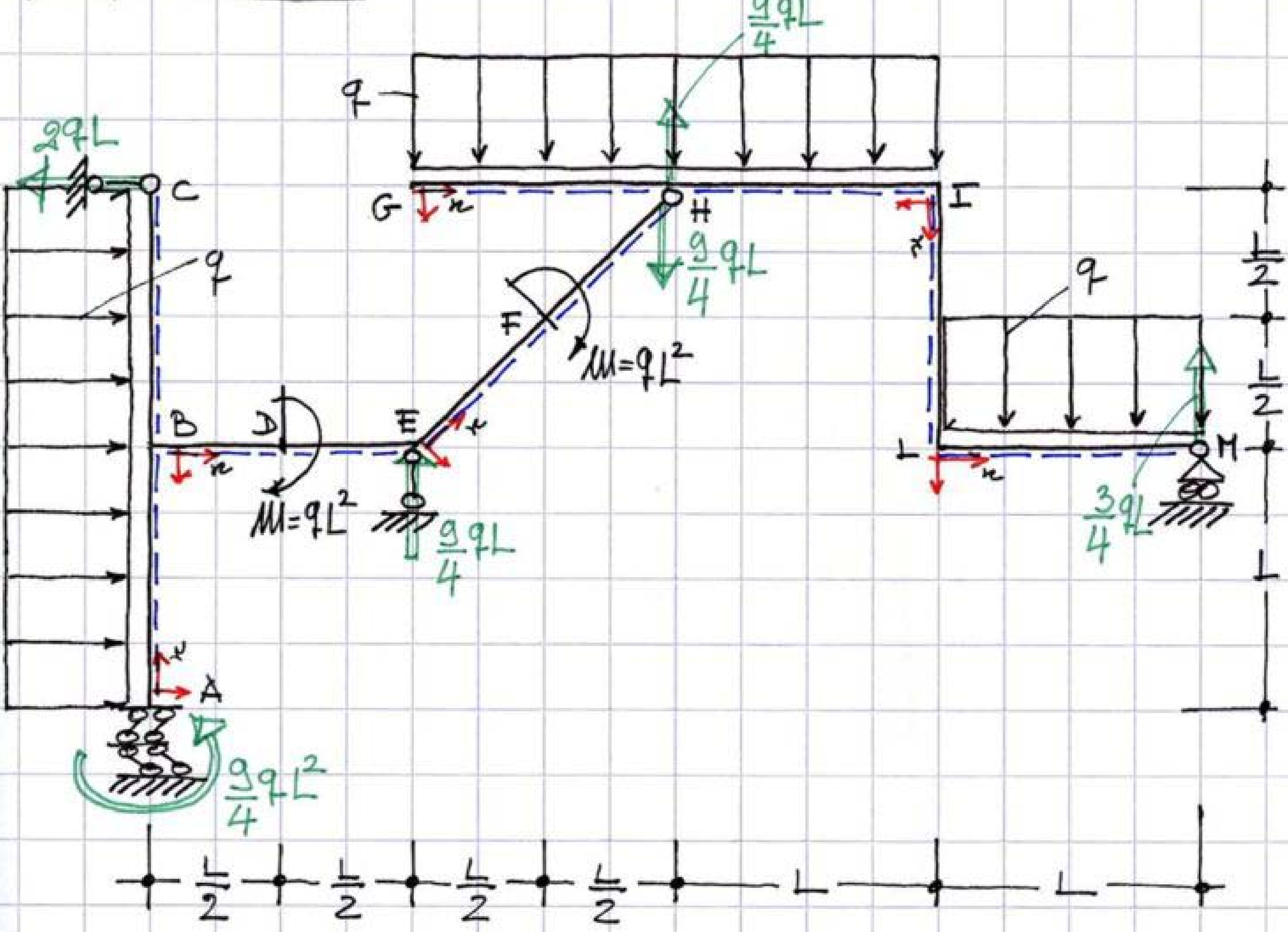
È facile verificare che i valori delle reazioni vincolari determinati per via grafica coincidono con quelli valutati per via analitica.

<u>Si ha in definitiva</u>:

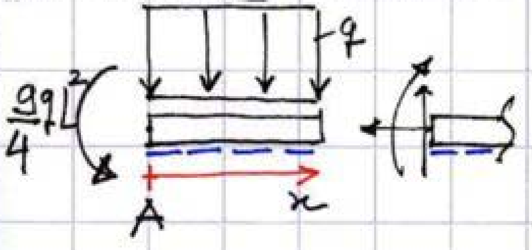


- DETERMINAZIONE DELLE CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

CS – metodo delle sezione ideale per il calcolo di $N(x)$, $T(x)$ ed $M(x)$ -



TRATTO AB $\quad 0 \le x \le L$



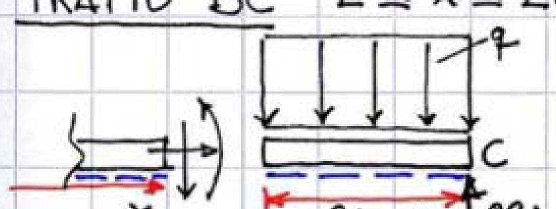
$N(x) = 0; \quad T(x) = -qx;$

$$\begin{cases} T(x)\big|_{x=0} = 0 \\ T(x)\big|_{x=L} = -qL \end{cases}$$

$M(x) = -\frac{9}{4}qL^2 - q\frac{x^2}{2}$

$$\begin{cases} M(x)\big|_{x=0} = -\frac{9}{4}qL^2 \\ M(x)\big|_{x=L} = -\frac{11}{4}qL^2 \end{cases}$$

TRATTO BC $\quad L \le x \le 2L$



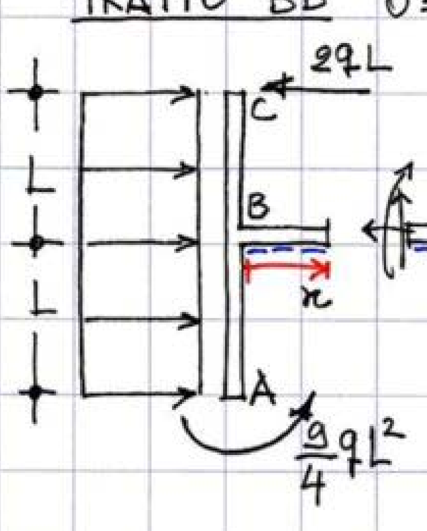
$N(x) = 0; \quad T(x) = q(2L-x) - 2qL$

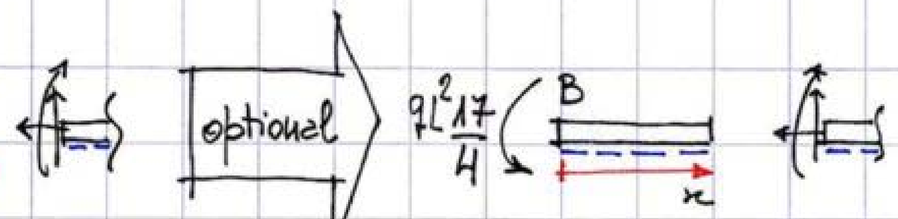
$$\begin{cases} T(x)\big|_{x=L} = -qL \\ T(x)\big|_{x=2L} = -2qL \end{cases}$$

$M(x) = 2qL(2L-x) - q\frac{(2L-x)^2}{2}$

$$\begin{cases} M(x)\big|_{x=L} = \frac{3}{2}qL^2 \\ M(x)\big|_{x=2L} = \phi \end{cases}$$

TRATTO BD $\quad 0 \le x \le \frac{L}{2}$

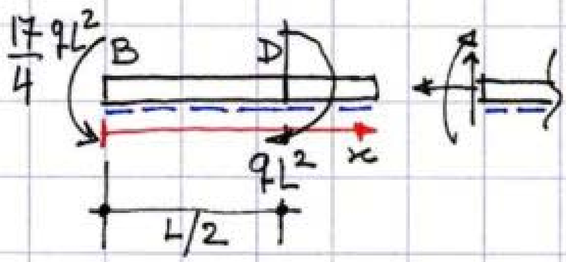




$N(x) = 0;\ T(x) = 0$

$M(x) = -\frac{17}{4}qL^2$

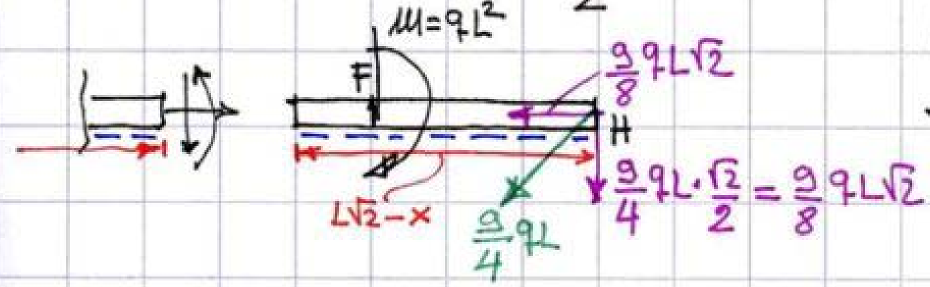
TRATTO DE $\quad \frac{L}{2} \le x \le L$ (vale lo schema optional del tratto BD)



$N(x) = 0;\ T(x) = 0$

$M(x) = qL^2 - \frac{17}{4}qL^2 = -\frac{13}{4}qL^2$

TRATTO EF $\quad 0 \le x \le \frac{L\sqrt{2}}{2}$



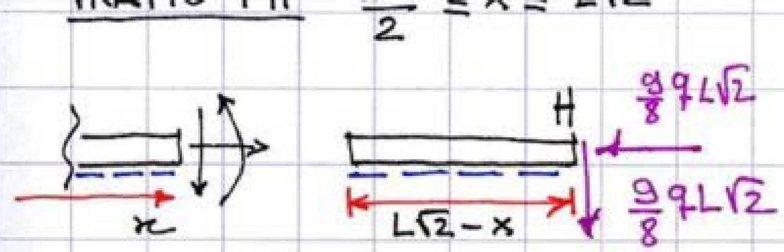
$N(x) = -\frac{9}{8}qL\sqrt{2};$

$T(x) = \frac{9}{8}qL\sqrt{2};$

$M(x) = -qL^2 - \frac{9}{8}qL\sqrt{2}\left(L\sqrt{2} - x\right)$

$\begin{cases} M(x)\big|_{x=0} = -\frac{13}{4}qL^2 \\ M(x)\big|_{x=\frac{L\sqrt{2}}{2}} = -\frac{17}{8}qL^2 \end{cases}$

TRATTO FH $\quad \frac{L\sqrt{2}}{2} \le x \le L\sqrt{2}$

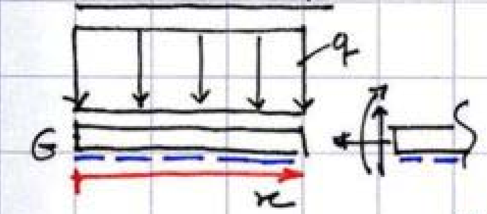


$N(x) = -\frac{9}{8}qL\sqrt{2};\ T(x) = \frac{9}{8}qL\sqrt{2};$

$M(x) = -\frac{9}{8}qL\sqrt{2}\left(L\sqrt{2} - x\right)$

$\begin{cases} M(x)\big|_{x=\frac{L\sqrt{2}}{2}} = -\frac{9}{8}qL^2 \\ M(x)\big|_{x=L\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$

TRATTO GH $\quad 0 \le x \le L$



$N(x) = 0;\ T(x) = -qx$

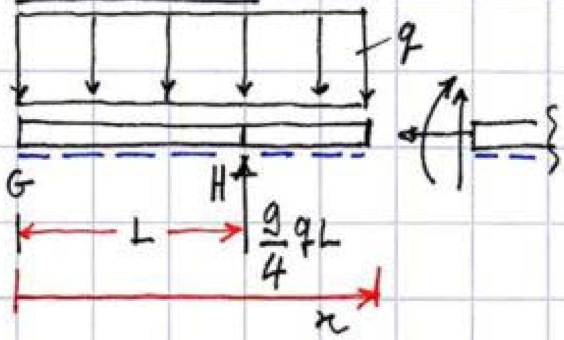
$\begin{cases} T(x)\big|_{x=0} = 0 \\ T(x)\big|_{x=L} = -qL \end{cases}$

$M(x) = -q\frac{x^2}{2}$

$M(x)\big|_{x=0} = 0;\ M(x)\big|_{x=L} = -\frac{qL^2}{2}$

FUSCHI
PISANO
SOFI

TRATTO HI $L \leq x \leq 2L$



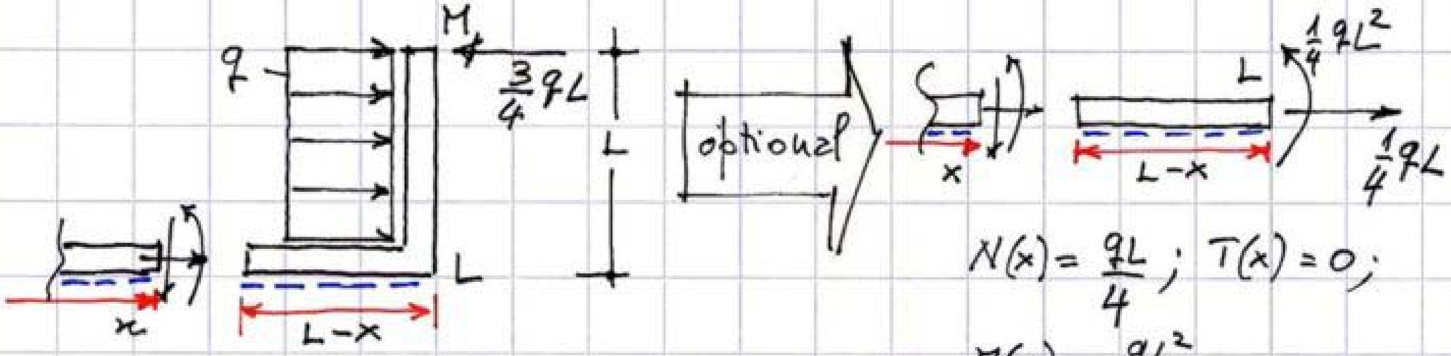
$$N(x) = 0\ ;\quad T(x) = -qx + \frac{9}{4}qL$$

$$\begin{cases} T(x)\big|_{x=L} = \frac{5}{4}qL \\ T(x)\big|_{x=2L} = \frac{1}{4}qL \end{cases}$$

$$M(x) = -q\frac{x^2}{2} + \frac{9}{4}qL(x-L)$$

$$\begin{cases} M(x)\big|_{x=L} = -\frac{qL^2}{2} \\ M(x)\big|_{x=2L} = \frac{1}{4}qL^2 \end{cases}$$

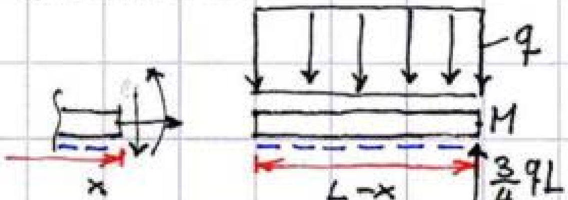
TRATTO IL $0 \leq x \leq L$



$$N(x) = \frac{qL}{4}\ ;\quad T(x) = 0\ ;$$

$$M(x) = \frac{qL^2}{4}$$

TRATTO LM $0 \leq x \leq L$



$$N(x) = 0\ ;\quad T(x) = -\frac{3}{4}qL + q(L-x)$$

$$\begin{cases} T(x)\big|_{x=0} = \frac{qL}{4} \\ T(x)\big|_{x=L} = -\frac{3}{4}qL \end{cases}$$

$$M(x) = \frac{3}{4}qL(L-x) - \frac{q(L-x)^2}{2}$$

$$\begin{cases} M(x)\big|_{x=0} = \frac{qL^2}{4} \\ M(x)\big|_{x=L} = 0 \end{cases}$$

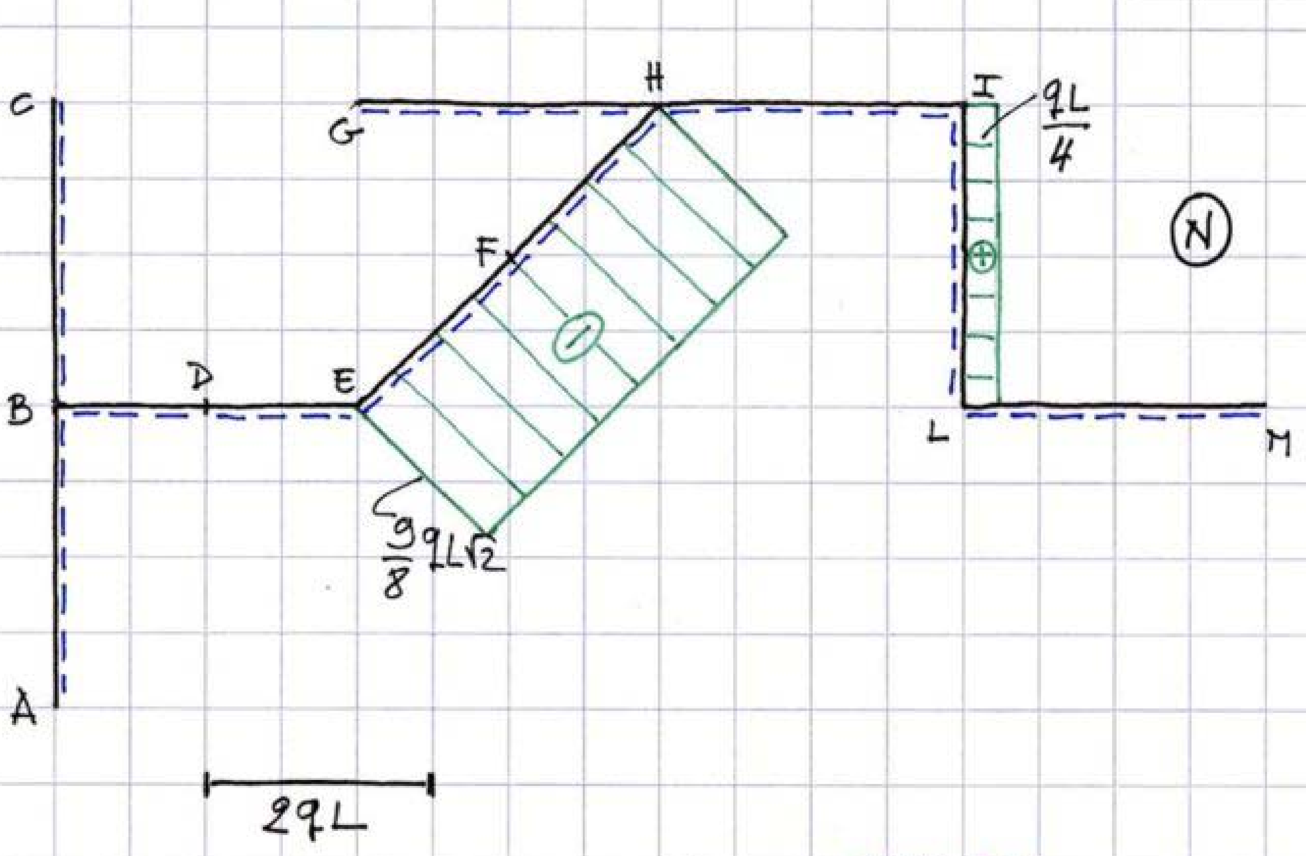
N.B. I valori del taglio in L $(x=0)$ ed in M $(x=L)$ sono di segno opposto!
Si calcola l'ascissa x della sezione in cui $T(x)=0$; in tale sezione $M(x)$ assume valore max.

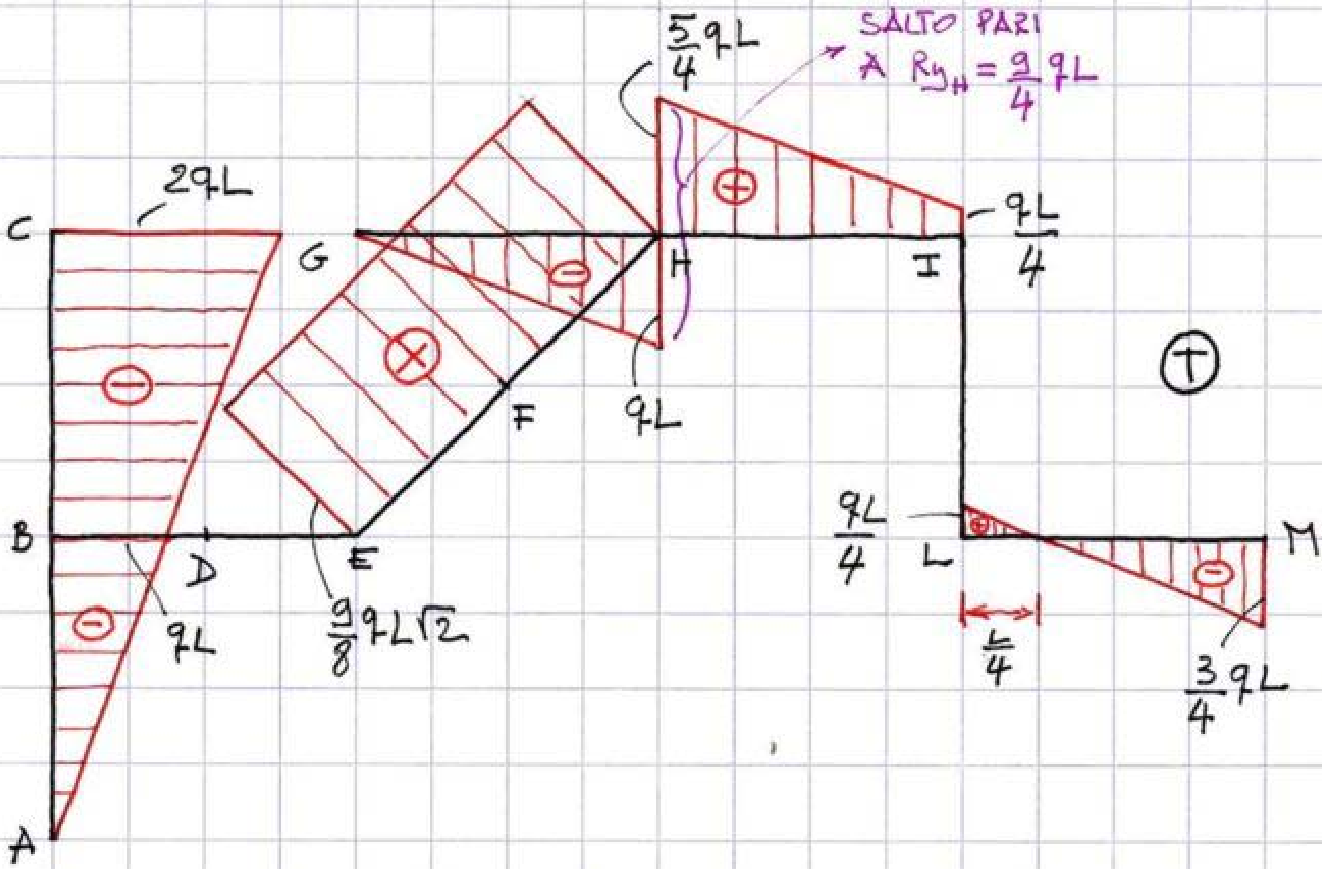
$$T(x) = 0 \rightarrow -\frac{3}{4}qL + qL - qx = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}L$$

$$M_{max} = M(x)\Big|_{x=\frac{L}{4}} = \underbrace{\frac{9}{32}}_{\simeq 0.28}qL^2$$

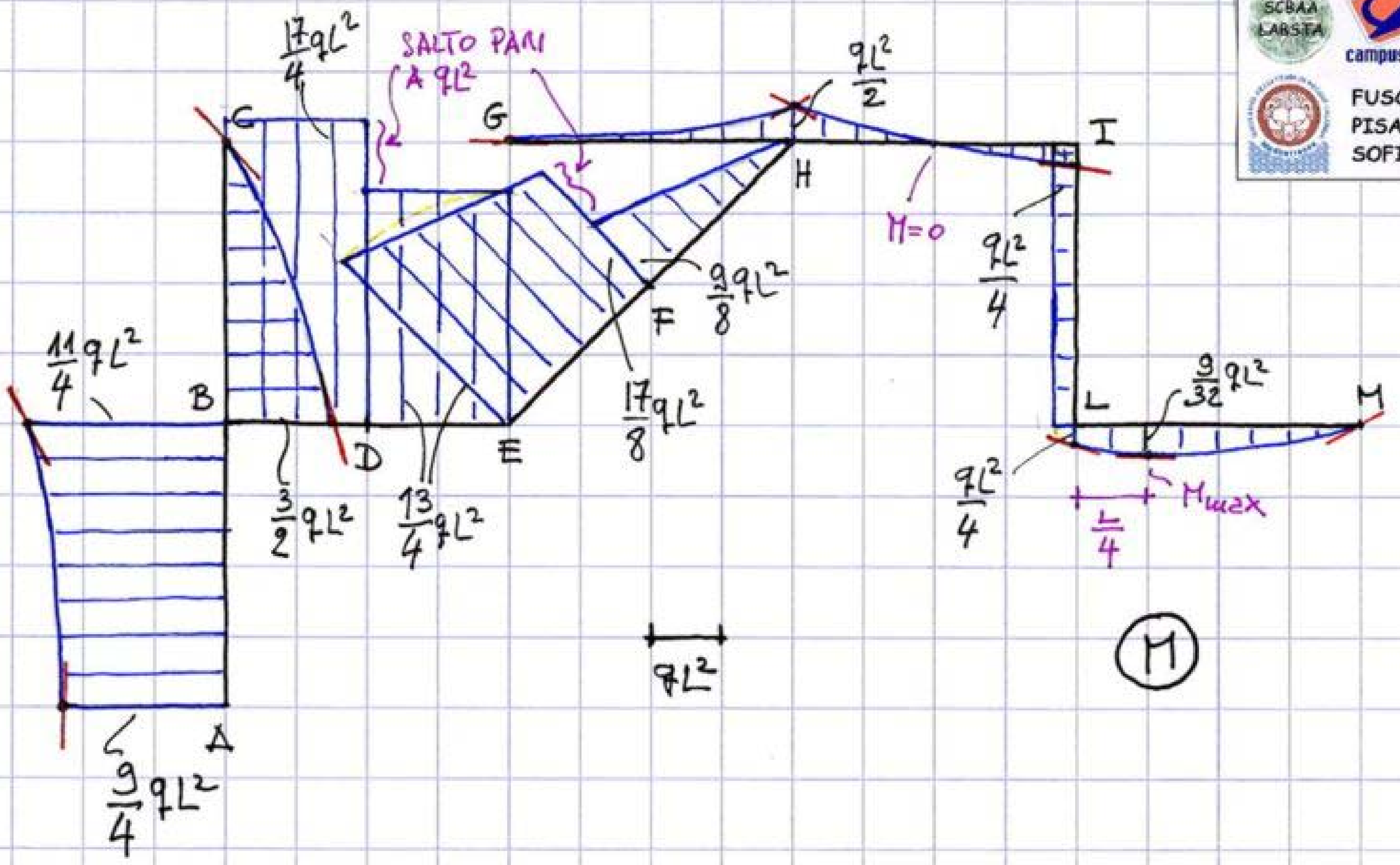
CS - diagrammi

FUSCHI
PISANO
SOFI



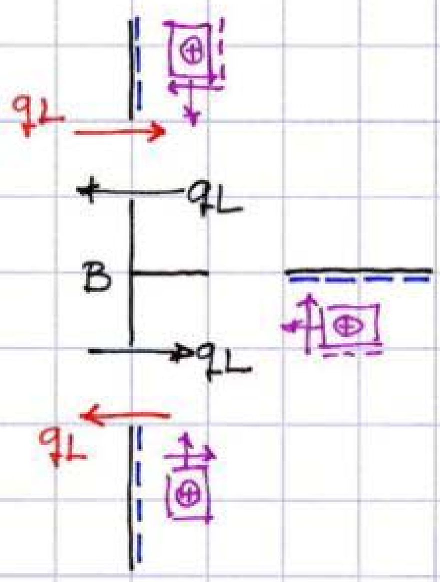


FUSCHI
PISANO
SOFI



• VERIFICHE AL NODO TRIPLO B

– alla traslazione (cfr. diagrammi N e T)



– alla rotazione (cfr. diagr. M)